



**LATVIJAS  
UNIVERSITĀTE**

**Promocijas darba  
kopsavilkums**

---

**Didzis Berenis**

**ROTĒJOŠU PASTĀVĪGO  
MAGNĒTU IEROSINĀTAS  
TURBULENTAS ŠĶIDRA METĀLA  
PLŪSMAS SKAITLISKA  
MODELĒŠANA**

Rīga 2023



# LATVIJAS UNIVERSITĀTE

FIZIKAS, MATEMĀTIKAS UN OPTOMETRIJAS FAKULTĀTE

**Didzis Berenis**

## **Rotējošu pastāvīgo magnētu ierosinātas turbulentas šķidra metāla plūsmas skaitliska modelēšana**

PROMOCIJAS DARBA KOPSAVILKUMS

Doktora grāda iegūšanai fizikas nozarē  
Apakšnozare: šķidrums un gāzu mehānika

Zinātniskais vadītājs:  
*Dr. phys.* Ilmārs Grants

Rīga, 2023

Promocijas darbs izstrādāts Latvijas Universitātes Fizikas institūta MHD Tehnoloģiju laboratorijā no 2018. gada līdz 2023. gadam.

NACIONĀLAIS  
ATTĪSTĪBAS  
PLĀNS 2020



EIROPAS SAVIENĪBA

Eiropas Reģionālās  
attīstības fonds



LATVIJAS UNIVERSITĀTES  
FONDS

I E G U L D Ī J U M S T A V Ā N Ā K O T N Ē

Promocijas darbs sastāv no četrām publikācijām.

Darba forma: publikāciju kopa fizikas nozarē, šķidrumu un gāzu mehānikas apakšnozarē.

Darba zinātniskais vadītājs: *Dr. phys.* Ilmārs Grants, Latvijas Universitātes Fizikas institūta vadošais pētnieks MHD Tehnoloģiju laboratorijā.

Darba recenzenti:

1. *Dr. phys.* Andris Jakovičs, Latvijas Universitāte;
2. *Dr.* Valdis Bojarevičs, Griničas Universitāte, Lielbritānija;
3. *Dr.* Bernard Nacke, Leibnica Hanoveres Universitāte, Vācija.

Promocijas darba aizstāvēšana notiks 2023. gada 2. jūnijā plkst. 13.00 Latvijas Universitātes Fizikas nozares promocijas padomes atklātā sēdē.

Ar promocijas darbu un tā kopsavilkumu var iepazīties Latvijas Universitātes Bibliotēkā Rīgā, Kalpaka bulvārī 4.

LU Fizikas zinātņu nozares  
promocijas padomes priekšsēdētājs

*Dr. phys.* Andris Jakovičs

promocijas padomes sekretāre

Sintija Siliņa

© Latvijas Universitāte, 2023

© Didzis Berenis, 2023

ISBN 978-9934-18-985-2

ISBN 978-9934-18-986-9 (PDF)

## Anotācija

Promocijas darbā ir veikts skaitlisks un eksperimentāls pētījums par rotējošu pastāvīgo magnētu (RPM) ierosinātām elektriski vadošu šķidrumu turbulentām plūsmām slēgtos traukos. Pētījumā aplūkotā modeļa ģeometrija ir ar aksiāli simetrisku trauku šķidrumam, kuram koaksiāli ir novietots cilindrisks, šķērsvirzienā magnetizēts RPM. RPM mainīgais magnētiskais lauks tuvumā esošā vadītājā inducē strāvas un līdz ar to arī elektromagnētisku (EM) tilpuma spēku. Analītisks atrisinājums, kas ietver bezgalīgu eliptisko integrāļu rindu, ir iegūts spēkam, kuru cilindrisks RPM inducē koaksiāli novietotā vadošā cilindrā vai cilindriskā gredzenā. Atrisinājums ir salīdzināts ar eksperimenta un skaitliskā aprēķina rezultātiem. Vienkāršots analītiskais atrisinājums pēc tam ir arī iegūts RPM ierosinātai turbulentai plūsmai cilindrā. Tas tika panākts pievienojot dzenošā spēka radiālo atkarību eksistējošam atrisinājumam. Šis atrisinājums atļauj novērtēt maksimālo plūsmas ātrumu, kā arī ātruma maksimuma radiālo novietojumu. Tas sniedz paskaidrojumu neintuitīvai ātruma maksimuma aksiālajai pozīcijai, kas atrodas šķidrumu saturošā trauka pretējā pusē no RPM. Turbulentā plūsma cilindrā ir aprēķināta skaitliski apvienojot atvērtās pieejas modelēšanas programmas *OpenFOAM* un *Elmer*. Tika izstrādāta metode, lai ņemtu vērā feromagnētiskās detaļas, kuras paredzētas EM tilpuma spēka palielināšanai. Analītisko un skaitlisko aprēķinu rezultāti tika salīdzināti ar zemas temperatūras šķidrā metāla eksperimenta mērījumiem. Šajā specifiskajā gadījumā iegūta labā sakritība starp dažādām pieejām nav garantēta vispārīgam gadījumam kā tika ilustrēts ar nākamo aplūkoto piemēru. Ar RPM gredzena centrā ierosinātās plūsmas nestabilitāte tika pētīta plata gredzena gadījumā, kurā rodas brīvais nobīdes slānis radiālas strūklas formā. Pirmās nestabilitātes rezultātā rodas divi jauni stacionāri, aksiāli simetriski atrisinājumi, tas ir, strūklas noliekšanās uz augšu vai apakšu. Turpinot palielināt RPM inducētā spēka stiprumu, strūkla vispirms kļūst periodiska un pēc tam iegūst neregulāras svārstības. Vienlaikus strūkla vidēji ir izteikti nobīdīta no aksiālās vidusplaknes. Tam seko režīms ar turbulentu bistabilitāti, kurā strūkla ar nejaušiem intervāliem pārslēdzas starp noliekšanos uz augšu vai leju. Tas, ka plūsmai ir vairāk par vienu laikā vidējoto stāvokli, rada fundamentālas problēmas turbulences modeļiem, kuru aprakstam izmantots viens laikā vidējotais stāvoklis. Ar to varētu izskaidrot reizēm sliktu sakritību starp mērījumiem un standarta turbulences modeļiem, kuri pielietoti EM ierosinātām plūsmām noslēgtos tilpumos. Turbulenta bistabilitāte aplūkotajā gadījumā parādās pie maziem Reynoldsa skaitļiem. Tas paver iespēju modeli izmantot parādības prognozēšanas metožu izstrādei. Tika sagatavots eksperiments, lai novērotu bistabilitāti gredzenā ar caurspīdīgu elektrolītu, kurā krāsvielas plūsma tika vizuāli novērota vairāku stundu garumā. Tika novēroti ilgdzīvojoši plūsmas stāvokļi, bet bistabilitātes parādības esamības pierādījumi nebija tik pārliecinoši kā attiecīgajā skaitliskajā simulācijā.

# Pateicības

Galvenokārt, izsaku pateicību promocijas darba zinātniskajam vadītājam Dr. Ilmāram Grantam par sniegto iespēju, atvēlēto laiku un veiksmīgo sadarbību promocijas darba izstrādes laikā.

Augstu novērtēju Valtera Dzemes padomus programmu *OpenFOAM* un *Elmer* lietošanā. Pateicos Antrai Gailei par palīdzību ar spēka mērījumiem, kuri palīdzēja validēt analītisko spēka atrisinājumu, un paldies Matīsam Kalvānam par padomiem un palīdzību mērījumu iekārtas realizēšanā. Liels paldies Reinim Baranovskim par dalīšanos ar eksperimentā nomērīto ātrumu datiem, lai tos salīdzinātu ar skaitliskajiem aprēķiniem.

Tāpat augstu novērtēju Kalvja Kalniņa, Raimonda Nikoluškina un Ingus Pagasta palīdzību eksperimentālās iekārtas sagatavošanā, kas atļāva novērot plūsmu fluktuācijas elektrolītā. Paldies arī Ivaram Krastiņam par vairākām noderīgām ar programmēšanu saistītām diskusijām. Paldies visiem Fizikas institūta MHD Tehnoloģiju laboratorijas kolēģiem par produktīvo atmosfēru un pozitīvo noskaņu.

Sirsnīgs paldies manai sievai Dacei par pacietību, atbalstu un izpratni.

Augstu novērtēju Latvijas Universitātes fonda mecenāta SIA "Mikrotikls" piešķirto stipendiju, kas sniedza finansiālu atbalstu promocijas darba izstrādes laikā.

# Saturs

<b>Anotācija</b>	<b>3</b>
<b>Pateicības</b>	<b>4</b>
<b>Saturs</b>	<b>5</b>
<b>Vispārīgais darba raksturojums</b>	<b>6</b>
Rotējošu pastāvīgo magnētu pielietojums plūsmas ierosināšanā . . . .	6
Literatūras apskats . . . . .	8
Promocijas darba mērķis un uzdevumi . . . . .	10
Autora ieguldījums . . . . .	10
Promocijas darba struktūra . . . . .	11
Rezultātu aprobācija . . . . .	11
<b>1. Modeļa apraksts un analītiskais tilpuma spēks</b>	<b>14</b>
1.1. RPM inducētā tilpuma spēka izvedums . . . . .	16
1.2. Modeļa validēšana un pielietojumi . . . . .	17
<b>2. RPM ierosinātā plūsma cilindriskos traukos</b>	<b>20</b>
2.1. Analītiskais apraksts . . . . .	22
2.1.1. Robežslānis . . . . .	22
2.1.2. Plūsma kodolā . . . . .	23
2.2. Skaitliskās metodes . . . . .	24
2.3. Rezultāti un diskusija . . . . .	26
<b>3. Plūsmas nestabilitāte un bistabilitāte gredzenveida formas traukā</b>	<b>30</b>
3.1. Skaitliskās metodes . . . . .	31
3.2. Eksperimentālās metodes . . . . .	33
3.3. Rezultāti un diskusija . . . . .	35
3.3.1. Skaitliskie rezultāti . . . . .	35
3.3.2. Eksperimentālie rezultāti . . . . .	39
<b>Secinājumi</b>	<b>42</b>
<b>Tēzes</b>	<b>43</b>
<b>Literatūras saraksts</b>	<b>44</b>

# Vispārīgais darba raksturojums

## Rotējošu pastāvīgo magnētu pielietojums plūsmas ierosināšanā

Rotējoši pastāvīgie magnēti (RPM) ir efektīvs veids kā bez kontakta ierosināt elektriski vadošu šķidrums plūsmas. Magnēta rotācijas dēļ veidojas mainīgs magnētiskais lauks, kas rada laikā vidējotu tilpuma spēku tam tuvumā esošā elektriskā vadītājā. Šī metode jau sen ir pielietota metalurģijā [1, 2], kristālu audzēšanā [3, 4, 5] un citās tehnoloģijās, kurās izmanto elektromagnētisko (EM) indukciju ar indukcijas spolēm. Aizvietojot indukcijas spoles ar RPM var izvairīties no Džoula sasilšanas izraisītiem zudumiem, kas rodas ģenerējot magnētisko lauku. Pastāvīgo magnētu (PM) priekšrocība ir arī vienkāršāka iekārtas uzbūve. Pirmie izgatavotie PM bija pārāk vāji, lai realizētu šo ideju praksē, taču kopš bija pieejami retzemju PM ir iespējams uzbūvēt šķidro metālu sūkņus, kuru idejas pārbaudei pirmās iekārtas tika uzbūvētas Latvijas Universitātes Fizikas institūtā (LUFİ) 1990. gadu vidū [6]. Pēc tam PM sūkņi tika izstrādāti arī industriālajiem partneriem un zinātniskajām institūcijām [7, 8, 9]. Tālāk tika uzbūvēti arī efektīvi PM maisītāji [10] (Zmag, see <https://www.zmag.net/>). Tā kā RPM iekārtas ir relatīvi jaunas, tad var turpināt meklēt un pētīt citus potenciālos pielietojumus. Piemēram, sākotnējie pētījumi jau ir veikti RPM centrālās sūkņiem, kas paredzēti zemu temperatūru kausējumiem [11, 12].

LUFİ ir izstrādāta inovatīva metode elektriski vadošu šķidrums maisīšanai ar RPM. Šī metode var arī tikt izmantota, lai sūkņētu elektriski vadošus šķidrumus, un tā atšķiras no tradicionālajiem RPM sūkņiem. Ir liela brīvība maisītāja un sūkņa uzbūves izvēlē, taču katra izmaiņa ietekmē iekārtas veiktspēju: efektivitāti, maksimālo plūsmas ātrumu, plūsmas sadalījumu u.c. Problēma ietver akadēmiskus jautājumus par multifizikālu problēmu, uz kuriem atbildot, tiks papildināts skaitliski atrisināto hidrodinamikas uzdevumu klāsts. Tajā pašā laikā, problēma ir cieši saistīta ar industriālām iekārtām un iegūtie atrisinājumi pavērs iespēju veikt inženieraprēķinus fizikāli sarežģītām iekārtām, kuras vēl nav teorētiski pilnībā izprastas, bet kurām ir liela vērtība industrijā. Iepriekš veiktie eksperimenti un aprēķini ir apstiprinājuši, ka šī metode ir pārāka par šobrīd plaši izmantoto EM maisīšanas metodi. Tomēr šīs problēmas teorētiskā izpratne nav pietiekama, lai izgatavotu maisītāju ar paredzamu ierosināto plūsmu.

Ir zināms, ka rotējošu magnētisko lauku (RML) ierosinātas plūsmas kodolam piemīt gandrīz cieta ķermeņa rotācija [1], kuru maz ietekmē azimutālā spēka sadalījums. Vēl jo vairāk, rotācijai ir tendence dominēt pat tad, ja radiālie un aksiālie spēki ir līdzīga lieluma [13]. Šīs vispārīgās īpašības ļauj veikt pieņemamus novērtējumus par RPM ierosinātu plūsmu cilindriskos

traukos, izmantojot integrālo spēka momentu. Tomēr dažkārt RPM maisītāju un sūkņu iekārtu eksperimentālo mērījumu un tiem atbilstošo laikā vidējoto turbulences modeļu aprēķini stipri atšķiras, bet pārlicinošs kļūdu iemesls nav atrasts. Laikā vidējotie skaitliskie aprēķini paredz, ka simetriskās RPM sistēmās veidosies simetriski turbulentas plūsmas ātruma sadalījumi [14], bet eksperimentālie mērījumi norāda uz plūsmas asimetriju [14, 15]. Iespējams, ka dažos gadījumos šī atšķirība var tikt novelta uz eksperimentu kļūdu. Tajā pašā laikā, eksperimentos ir redzama zemu frekvenču dinamika [16, 15], kuru klātbūtne varētu radīt grūtības laikā vidējoto turbulences modeļu veiktspējai un galu galā novest pie aprēķinu kļūdas. Šī parādība ir maz pēlta gan skaitliski, gan teorētiski. Lai nonāktu pie secinājumiem par RPM maisītājiem un sūkņiem saistītiem jautājumiem, nepieciešams izstrādāt skaitlisko aprēķinu metodes, kurām ir akadēmiska nozīme un kuras varētu tikt adaptētas citu ar elektriski vadošu šķidrumu plūsmām saistītu problēmu risināšanai.

Ar šobrīd pieejamajām skaitliskās modelēšanas metodēm nav iespējams veikt tik plašus aprēķinus, lai ņemtu vērā visus iekārtas konstrukcijas variantus (veidus, kādos ietekmēt plūsmu). Līdz ar to, ir grūti atrast optimālu risinājumu kādam no industriāliem uzdevumiem. Tāpat ir grūti atbildēt uz akadēmiskiem jautājumiem par RPM sistēmām. Ir grūti arī atrast tādus skaitliskos rīkus, ar kuriem visos sistēmas režīmos var atbildēt uz fundamentālu pētījuma problēmjaudājumu: “Kādas ir RPM inducētās strāvas un kāda ir magnētisko spēku izraisītā turbulenta plūsma?” Slikti vadošos šķidrums, kā, piemēram, elektrolītos, RPM ierosinātā plūsma parasti nesasniedz ātrumus, kuri būtu salīdzināmi ar RML ātrumu. Tādā gadījumā matemātiski jautājums par RPM inducētajām strāvām ir lineārs. Atrisinājums ir papildus vienkāršots, ja RPM ierosinātās strāvas nav pietiekami stipras, lai inducētu sekundāro magnētisko lauku, kurš ievērojami izkropļotu strāvu sadalījumu.

Savukārt, RPM ierosinātās plūsmas ātrums šķidrums metālos var būt līdzīgs RML ātrumam un tādā gadījumā vadošā šķidruma ātruma sadalījums ievērojami ietekmē kopējo strāvu sadalījumu un problēma kļūst nelineāra. Neraugoties uz to, strāvu blīvuma aprēķins, neņemot vērā ātrumu, bieži vien var kalpot kā pirmais tuvinājums, bet ātruma sadalījuma ieviesto strāvu blīvuma korekciju var pievienot vēlāk. Pie tam RPM maisītāju un sūkņu sistēmas ir mazu magnētisko Reinoldsa skaitļu ( $Re_m$ ) režīmos, kas nozīmē, ka plūsmas ātruma ieguldījums magnētiskā lauka ģenerēšanā ir neievērojams. Mazu  $Re_m$  režīms pieļauj, ka strāvu sadalījumu un ierosināto plūsmu var meklēt atsevišķi. Tā rezultātā, lielu daļu no pētījuma mērķiem, kuri ir RPM sistēmām atbilstošos režīmos, var atrisināt analītiski. Tomēr iekārtas fizikālā uzbūve ir samērā jauna ideja un šādi atrisinājumi vēl nav pieejami zinātniskajā literatūrā.



## Literatūras apskats

Nesen ir publicēta analītiska izteiksme magnētiskā lauka sadalījumam ap cilindrisku, šķērsvirzienā magnetizētu PM [17]. Taču atbilstoša inducēto strāvu un EM spēku izteiksme nav iegūta. Iepriekš iegūtā RML analītiskā tilpuma spēku izteiksme [18] ir bijusi noderīga daudziem sekojošiem pētījumiem [19, 4, 20, 21]. Bieži vien maisītāju un sūkņu iekārtas ir aksiāli simetriskas formas. Viena no tām ir plakana cilindra jeb diska forma, jo tai ir liela aksiālo robežu virsma. Pieliekot azimutāli nevienmērīgu aksiāla virziena magnētisko lauku ar leņķisko rotācijas frekvenci, traukā tiek ierosināts azimutālais ātrums, kā arī rodas spēcīgs spiediens radiālā virzienā uz āru [7]. Šāds dizains ir izmantots centrālās sūkņu izveidē [7], kuros kanāla relatīvi lielais šķērsriezuma laukums sniedz efektīvu veidu, lai ierosinātu lielas caurteces. Taču disku tipa sūkņus nepieciešams izgatavot ar pietiekami stipru radiāli ārējo sienu, lai tā izturētu spēcīgo spiedienu, kas rodas pie lielām caurtecēm [7]. Tajā pašā laikā, plāna cilindra jeb gredzena formas kanāls var droši strādāt pie lielām caurtecēm ar plānāku sienas biezumu [7].

Divu veidu dizaini – diska vai gredzena formas – ir bijuši aplūkoti EM ierosinātai šķidru metālu maisīšanai, kā arī masas pārnesei lielās kausējuma tilpnēs [12, 22, 23]. Starp potenciālajiem pielietojumiem ir temperatūras izlīdzināšana un lūzņu iemaisīšana kausējumā alumīnija pārkausēšanas krāsnīs [10], mikro un nano daļiņu aglomerātu dispersija un iemaisīšana metālā [24, 25], alumīnija degazēšana un šķidrā metāla transportēšana alumīnija dozatorā [26]. RPM ierosinātās plūsmas ir pētītas dažādiem industriāliem pielietojumiem, kā, piemēram, šķidra metāla transportēšanai [6], kausējuma samaisīšanai alumīnija krāsnīs [10], daļiņu iemaisīšanai metāla kompozītu materiālu ražošanas nolūkiem [27, 28].

Parasti EM ierosinātās šķidra metāla plūsmas ir stipri turbulentas un nav iespējams veikt to tiešo skaitlisko simulāciju (TSS) praktiskos laika intervālos. Tādā gadījumā var izmantot turbulences modelēšanu, kas samazina nepieciešamību izšķirt visas plūsmas detaļas. Tās ātro aprēķinu laika dēļ, populāra ir tā sauktā Reynoldsa vidējoto Navjē–Stoksa (RVNS) turbulences modeļu klase. RVNS modeļu pieņēmums ir, ka plūsmu var sadalīt tās laikā vidējotajā daļā un turbulento ātruma fluktuāciju daļā. RVNS modeļi labi sakrīt ar eksperimentiem, kuros modeļa pieņēmumi lielā mērā izpildās. Daži no piemēriem ir plūsma caurulē [29, 30], virpuļplūsma cilindrā [1, 31] un strūklas plūsma [32].

Dažkārt plūsmas ir sarežģītākas un eksistē vairāki konkurējoši atrisinājumi, kas var radīt problēmas laikā vidējotajam aprakstam [14, 16, 15, 33, 34, 35]. Tādos gadījumos problēmas varētu būt radušās atrisinājuma bifurkāciju dēļ. Vienkāršs bifurkāciju piemērs ir stacionāra atrisinājuma sazarotāšanās, kad veidojas vairāki jauni atrisinājumi no kuriem realizējas tikai viens. Cits bifurkācijas tips ir Hopfa bifurkācija [36], kura apraksta stacionārā atrisinājuma pāriešanu periodiskā atrisinājumā. Pie tam Hopfa bifurkācijas tuvumā var

veidoties arī histerēzes cilpa [37]. Pie kādiem noteiktiem sistēmas parametriem sistēma var kļūt aperiodiska jeb intermitējoša. Šo pāreju uz haosu nereti sauc par Pomo–Manevila (*Pomeau–Manneville*) scenāriju [38]. Haotiskie režīmi ir klasificēti vairākās kategorijās [39, 40, 41]. Vienam no režīmiem, sauktam par ieslēgts–izslēgts intermitēšanu (*on–off intermittency*) [42], piemīt tam raksturīgi ik pa laikam notiekoši uzliesmojumi (“ieslēgts” stāvoklis), kas atļauj pāreju uz citu sistēmas atraktoru, kurā sistēma var pavadīt ilgus laika periodus (sauktus par “izslēgts” stāvokli) pirms notiek nākamā pāreja. Laiks, kuru pavada katrā no stāvokļiem ir nejaušs un var pārsniegt raksturīgo impulsa difūzijas laiku. Sistēmai var piemist ieslēgts–izslēgts intermitēšanas parādība arī tad, ja sistēmai ir tikai viens stabils atraktors. Taču, ja sistēmai ir vēl viens atraktors, uz kuru tā var pāriet kādā no uzliesmojuma notikumiem, tad šo parādību sauc par divu stāvokļu ieslēgts–izslēgts intermitēšanu [43].

Raksturīga statistiskā daba, kas palīdz identificēt ieslēgts–izslēgts intermitējošas sistēmas, ir “izslēgts” stāvokļu intervālu sadalījuma slīpuma koeficients  $-3/2 \log\text{-}\log$  skalā [44, 45, 46]. Ieslēgts–izslēgts intermitējošu sistēmu īpašības ir noteiktas tādām plūsmu dinamikas sistēmām, kā plūsma aiz šķēršļa [47, 48, 49, 50], dreifējošie viļņi [51], sfēriska Kueta plūsma [52] un šķidra metāla plūsma magnētiskā laukā [53]. Parādība, kurā notiek režīmu maiņa, ir novērota arī neironu darbībā. Piemēram, ieslēgts–izslēgts intermitēšanai raksturīgi sadalījumi ir novēroti ierakstītajos epileptisku peļu smadzeņu signālos [45], kā arī ierakstītajos datos, uzdodot cilvēkiem uz pirksta balansēt nūju [54]. Ieslēgts–izslēgts intermitēšanas parādībai varētu arī būt loma novērotās ģeodinamo un Saules aktivitātes izskaidrošanā. Zemes magnētiskā lauka apvēršanās notikumu sadalījumam ir līdzība ar ieslēgts–izslēgts intermitēšanas parādību [55, 56, 57]. Ir grūti analizēt tādu sarežģītu sistēmu kā dinamo vienu pašu [58] un vēl jo vairāk, ja ņem vērā ārējos faktorus. Tas dabiski noved pie jautājuma: “Vai Zemes magnētiskā lauka apvēršanās ir iekšēju vai ārēju faktoru, kā, piemēram, saules darbības [59] ietekmē?” Saules aktivitātei ir piedēvēta ieslēgts–izslēgts intermitējoša daba [60, 59]. Tomēr tiek aktīvi diskutēts vai saules ciklu pamatā esošais mehānisms ir iekšēju vai ārēju faktoru ietekmē [61, 62]. Ir daži jautājumi, kas ir kopīgi visām minētajām sistēmām: “Vai ārējie faktori ir nepieciešami, lai ierosinātu pāreju? Kas ierosina pāreju? Vai pārejas var tikt prognozētas?”

Lielu Reynoldsa skaitļu ( $Re$ ) režīmos vairāku ilgi dzīvojošu “izslēgts” stāvokļu aprēķins ar TSS nav iespējams. Aprēķins lielu  $Re$  gadījumos ir iespējams ar lielo virpuļu simulācijas turbulences modeļiem [49], taču parametrisko aprēķinu veikšana ir nepraktiska. Savukārt, vidējoto lauku turbulences modeļi ieslēgts–izslēgts intermitēšanas klātbūtnē ir problemātiski un var sniegt ar eksperimentiem nesalāgojamus rezultātus. Viens variants, kurš, izmantojot līdzīgu paņēmieni, ir ticis aplūkots sistēmai ar reducētu dimensiju skaitu [50], ir identificēt un atrast katra “izslēgts” stāvokļa vidējo vērtību.

Atvērtās pieejas rīku kombinācija, kas varētu palīdzēt atbildēt uz jautājumiem par RPM maisītāju sistēmām ir *Elmer* (<http://www.elmerfem.org/>), *OpenFOAM* (<https://openfoam.org/>) un *EOF-Library* [63]. RPM inducēto strāvu blīvumu un tilpuma spēku sadalījumu vadošos ķermeņos var noteikt ar programmu *Elmer*. Ar iegūtu tilpuma spēku ierosināto plūsmu var aprēķināt izmantojot programmu *OpenFOAM*, kur programma *EOF-Library* nodrošina komunikāciju abos virzienos starp *Elmer* un *OpenFOAM*.

## Promocijas darba mērķis un uzdevumi

Galvenie promocijas darba mērķi ir skaitliski izpētīt RPM maisītu elektriski vadošu šķidrums plūsmu un meklēt cēloņus, lai izskaidrotu dažkārt novēroto ievērojamo nesakrītību starp eksperimentiem un skaitliskajiem aprēķiniem, kuros izmanto turbulences modeļus ar laikā vidējotas plūsmas aprakstu. Galvenie promocijas darba uzdevumi ir:

- izveidot skaitliskos risinājumus, lai aprēķinātu RPM ierosinātu tilpuma spēku un vienkāršās formas traukos ierosināto turbulento plūsmu;
- iegūt RPM inducētā tilpuma spēka sadalījumu elektriski vadošā paraugā;
- aprēķināt RPM ierosināto turbulentās plūsmas sadalījumu dažādas formas traukos;
- novērtēt laikā vidējotā apraksta turbulences modeļu veikspēju plūsmas modelēšanā.

## Autora ieguldījums

Darba autors ir izvedis analītisku atrisinājumu tilpuma spēkam, kas rodas elektriski vadošos cilindros vai cilindriskos gredzenos tiem koaksiāla cilindriska RPM klātbūtnē, formā, kura ietver eliptiskos integrāļus [dis1]. Papildus analītiskajam atrisinājumam autors sagatavoja eksperimentālo iekārtu un izmērīja spēku eksperimentāli [dis1]. Autors ieguva vienkāršotu analītisko atrisinājumu RPM ierosinātai turbulentai plūsmai cilindrā [dis2], kā arī aprēķināja turbulento plūsmu skaitliski [dis2]. Papildus tam, autors izstrādāja metodi, ar kuru var ņemt vērā feromagnētiskās detaļas, kuras paredzētas EM tilpuma spēka palielināšanai [dis2]. Autors veica vairākas simulācijas ar *OpenFOAM*, lai izpētītu gredzena traukam centrā novietota RPM ierosinātas plūsmas nestabilitāti. Aprēķini tika veikti kā daļa no parametriskā aprēķina mainot ģeometriskos parametrus [dis3] vai mainot spēka parametru [dis4]. Papildus tam, autors veica skaitliskos aprēķinus, lai izpētītu bistabīlo plūsmas dabu. Kā arī, autors vairāku iterāciju veidā izstrādāja, notestēja un uzlaboja

eksperimentālo iekārtu, ar kuru varēja eksperimentāli novērot plūsmas virziena maiņu gredzena iekārtā ar caurspīdīgu elektrolītu [dis4].

## Promocijas darba struktūra

Promocijas darbā tiek pētītas sistēmas, kurās RPM inducē spēku ar elektriski vadošu šķidrumu aizpildītos traukos. Inducētā tilpuma spēka analītiskais apraksts, kas ir izvests aksiāli simetriskiem gadījumiem ar koaksiāli novietotu RPM, ir paskaidrots promocijas darba kopsavilkuma pirmajā nodaļā un detalizēti aprakstīts publikācijā [dis1]. Ierosinātā plūsma vienā no konfigurācijām – virs RPM novietots cilindrisks trauks – ir detalizēti izanalizēta publikācijā [dis2]. Galvenie šī pētījuma rezultāti ir aprakstīti promocijas darba kopsavilkuma otrajā nodaļā. Vēl viena no aksiāli simetriskām konfigurācijām ir ap RPM novietots gredzena formas trauks. Plūsmas stabilitāte atkarībā no gredzena rādiusa ir pētīta publikācijā [dis3] un plūsmas haotiskā daba pētīta publikācijā [dis4]. Šo pētījumu rezultāti ir izklāstīti promocijas darba kopsavilkuma trešajā nodaļā. Promocijas darba kopsavilkuma beigās ir apkopoti galvenie promocijas darbā iegūtie secinājumi un tēzes.

## Rezultātu aprobācija

### Zinātniskās publikācijas

- [dis1] D. Berenis, I. Grants, “Analytical induced force solution in conducting cylindrical bodies and rings due to a rotating finite permanent magnet”, *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, Volume 497, 165856 (2020), <https://doi.org/10.1016/j.jmmm.2019.165856>
- [dis2] D. Berenis, R. Baranovskis, I. Grants, T. Beinerts, and A. Bojarevičs, “Permanent magnet bottom-stirred swirling flow in coaxial shallow cylindrical containers”, *Physics of Fluids* 33, 055127 (2021), <https://doi.org/10.1063/5.0047706>
- [dis3] I. Grants, D. Berenis, “Stability of electrically conducting liquid flow driven by a rotating magnetic dipole in a ring channel”, *Physics of Fluids* 32, 044104 (2020), <https://doi.org/10.1063/5.0002094>
- [dis4] D. Berenis, I. Grants, “Experimental and numerical investigation of bistability in rotating permanent magnet-generated electrolyte flow in a ring-shaped container”, *Physics of Fluids* 34, 124106 (2022), <https://doi.org/10.1063/5.0128454>

Publikācijas, kas nav iekļautas promocijas darbā:

- [dis5] K.K. Berga, D. Berenis, M. Kalvāns, et al. “Model Experiment for Molten Metal Temperature Homogenization with Rotating Permanent Magnet”, *JOM* 74, 2450–2460 (2022), <https://doi.org/10.1007/s11837-022-05288-y>
- [dis6] R. Baranovskis, D. Berenis, I. Grants, et al. “Contactless Aluminum Degassing System—GaInSn Model Experiments and Numerical Study”, *J. Sustain. Metall.* 7, 1899–1909 (2021), <https://doi.org/10.1007/s40831-021-00459-8>

## Dalība konferencēs

Rezultāti tika prezentēti starptautiskās zinātniskajās konferencēs:

- [conf1] D. Berenis, I. Grants, “Numerical simulations on bifurcations and experiments on bi-stability in forced transparent electrolyte flow in a ring-shaped container”, BIFD 2022, August 17, 2022, Groningen, Netherlands
- [conf2] D. Berenis, I. Grants, “Experiments on bi-stability in rotating permanent magnet generated electrolyte flow in a ring-shaped container”, PAMIR 2022, July 5, Krakow, Poland
- [conf3] D. Berenis, I. Grants, “Transition to turbulence of electrically conducting liquid flow driven by a rotating magnetic dipole in a ring channel”, 25th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, Thematic Session – Flow Instability and Transition, August 27, 2021
- [conf4] D. Berenis, I. Grants, “Analytical solution of electromagnetic force and numerical calculation of the flow in a conducting cylindrical ring due to a rotating permanent magnet”, 11th pamir International Conference Fundamental and Applied MHD, July 4, 2019, Reims, France

Kā arī Latvijas Universitātes zinātniskajās konferencēs:

- [conf5] D. Berenis, I. Grants, T. Beinerts, A. Bojarevičs, “Bi-stable turbulence of forced liquid metal flow in a rectangular container”, 80th Latvijas Universitātes zinātniskā konference, 04.02.2022, Rīga, Latvia

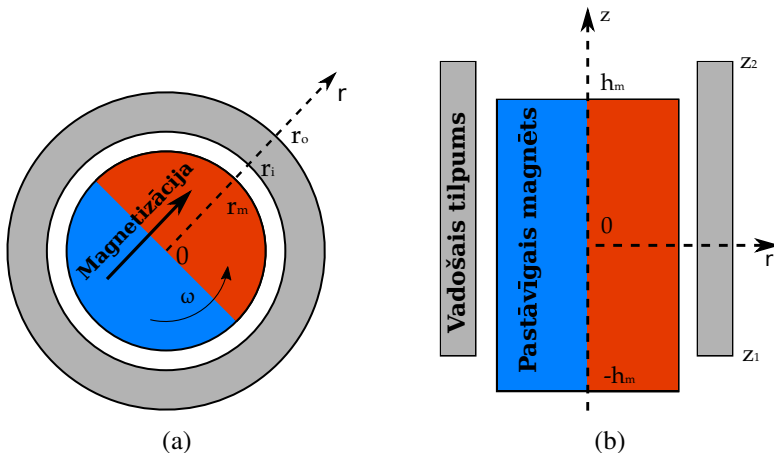
[conf6] D. Berenis, I. Grants, “Rotējošu pastāvīgo magnētu inducētā spēka analītisks atrisinājums elektrovadošos gredzenos”, 77th Latvijas Universitātes starptautiskā zinātniskā konference, sekcija Fundamentālā un lietišķā magnetohidrodinamika, 22.02.2019, Rīga, Latvia

## Zinātniskie projekti

- Implementation of activities described in the Roadmap to Fusion during Horizon Europe through a Joint Programme of the members of the EUROfusion consortium under Horizon Europe/WP24-TRED (Apmācība un izglītība: kvalifikācijas darbu sagatavošana)
- “LU doktorantūras kapacitātes stiprināšana jaunā doktorantūras modeļa ietvarā”, Nr. 8.2.2.0/20/I/006
- Jauna tipa bezkontakta elektromagnētiskas vieglo sakausējumu degazācijas sistēmas izstrāde (Rūpnieciskie pētījumi), reģ. Nr. 1.1.1.1/18/A/149
- Magnetohidrodinamisko nestabilitāšu izpēte liela mēroga šķidro metālu bateriju realizācijai, reģ. Nr. Izp-2018/1-0017
- Combined CPS and fast moving liquid metal free surface for large power applications in divertor Description (WP8, WPDTT1, Porainās vides un materiāli)/EUROFUSION project “Implementation of activities described in the Roadmap to Fusion during Horizon 2020 through a Joint programme of the members of the EUROfusion consortium” (akronīms- EUROfusion)
- Līgums par zinātniski tehniskās produkcijas sagatavošanu un zinātniski tehniskā pakalpojuma sniegšanu projekta “Tehnoloģijas izstrāde silīcija rūpniecības atkritumu pārstrādei par silīcija-alumīnija ligatūru” vajadzībām, reģ. Nr. EPM-2015-1

# 1. Modeļa apraksts un analītiskais tilpuma spēks

Aplūkotā modeļa ģeometrija ir aksiāli simetriska un uz tās simetrijas ass ir novietots šķērsvirzienā magnetizēts, cilindriskas formas PM ar paliekošo magnetizāciju  $B_{rem}$  un rādiusu  $r_m$ , kas rotē ar leņķisko frekvenci  $\omega$ . 2. att. ir ilustrēts aksiāli simetriskais modelis vadoša gredzena gadījumā ar patvaļīgām aksiālajām un radiālajām robežām, kur  $r$  ir radiālā un  $z$  aksiālā virziena apzīmējums. Skatā no augšas (2. a att.) ir parādīti  $r_i$  un  $r_o$ , vadošā ķermeņa iekšējais un ārējais rādiuss. Savukārt, sāna skatā (2. b att.) ir parādīti ģeometriskie parametri  $z_1$ ,  $z_2$  un  $h_m$ , attiecīgi vadošā ķermeņa apakšējā un augšējā robeža un magnēta pusaugstums. Vadošā ķermeņa blīvums un elektriskā vadītspēja attiecīgi tiek apzīmēti ar  $\rho$  un  $\sigma$ . Aplūkotais modelis iekļauj arī cilindriskus vadošos ķermeņus ( $r_i = 0$ ) gadījumos, kad  $z_1 > h_m$  vai  $z_2 < -h_m$ .



2. attēls. Modeļa skice: (a) horizontālais šķēlums; (b) vertikālais šķēlums caur simetrijas asi.

RPM inducē strāvas vadošajā ķermenī, kas kombinācijā ar magnētisko lauku rada tilpuma spēku. Tilpuma spēku var izteikt kā  $\mathbf{F} = \mathbf{J} \times \mathbf{B}$  jeb inducētās strāvas blīvuma  $\mathbf{J}$  un magnētiskā lauka plūsmas blīvuma  $\mathbf{B}$  vektorālo reizinājumu. RPM bezkontakta veidā ierosinātais elektriski vadošā šķidruma ātrums  $\mathbf{u}$  var tikt noskaidrots atrisinot nesaspiežamu šķidrumu Navjē–Stoksa (N–S) vienādojumu

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = \nu \nabla^2 \mathbf{u} - \nabla p + \mathbf{F}, \quad (1)$$

kur  $p$  apzīmē spiedienu.

Elektriski vadošu šķidrumu RPM maisītājiem parasti ir līdzīgi apstākļi, kurus var aprakstīt ar bezdimensionālajiem parametriem. Raksturīgie lielumi (skat. 1. tabulu)  $L$ ,  $T$  un  $B$  nosaka  $J$ ,  $U$  un  $P$  mērogu. Pielietojot dimensionālo analīzi var tikt izteikti arī visu pārējo fizikālo lielumu mērogi.

<i>Fizikālais lielums</i>	<i>Apzīmējums</i>	<i>Definīcija</i>
Garums	$L$	
Laiks	$T$	
Magnētiskās plūsmas blīvums	$B$	
Strāvas blīvums	$J$	$\omega\sigma BL$
Ātrums	$U$	$\nu/L$
Spiediens	$P$	$\rho U^2$

1. tabula. Bezdimensionalizēšanai izmantoto fizikālo lielumu definīcijas.

EM maisītu (vai ar RPM ierosinātu) šķidru vadītāju plūsmu vispārīgā aprēķinā parasti tiek ņemts vērā skinefekts un vadošā šķidruma ātruma sadalījums.

Vadošā šķidrā tilpuma ātruma sadalījumu bezdimensionālā formā var izteikt kā  $\mathbf{v} = \mathbf{u}/U$ . Raksturīgais plūsmas ātrums parasti ir nezināmas lielums, tāpēc Reinoldsa skaitlis tiek definēts kā vadošā ķermeņa lielākais bezdimensionālais ātrums  $Re = \max|\mathbf{v}|$ . Lai raksturotu RPM radītā magnētiskā lauka ātrumu, tiek definēts RML Reinoldsa skaitlis  $Re_\omega = \omega L/U$ . Ja raksturīgais ātrums apmierina  $Re/Re_\omega \ll 1$ , tad vadošā ķermeņa ātrumu var ņemt vērā strāvas blīvuma aprēķinā.

Skinefektu var neievērot, ja bezdimensionālā frekvence  $S = Pr_m Re_\omega$  apmierina prasību  $S \leq 3$  [1]. Šeit magnētiskais Prandla skaitlis ir definēts kā  $Pr_m = \nu\sigma\mu_0$ , kur  $\mu_0$  ir vakuuma magnētiskā caurlaidība. Lielākajai daļai vadošu šķidrumu, tajā skaitā šķidrājiem metāliem,  $Pr_m$  ir ļoti mazs lielums ( $Pr_m < 10^{-5}$ ), līdz ar to prasība  $S \leq 3$  ir apmierināta izņemot, ja  $Re_\omega$  ir ļoti liels.

Magnētisko Reinoldsa skaitli var izteikt, izmantojot jau izveidotās definīcijas  $Re_m = Re Pr_m$ . Tiek pieņemts, ka  $Re_m$  ir neievērojami mazs lielums ( $Re_m \ll 1$ ), kas, savukārt, nozīmē to, ka vadošā ķermeņa ātruma pienesums magnētiskā lauka radīšanā ir neievērojams. Ierosinātajam tilpuma spēkam ir laikā vidējotā daļa  $\langle \mathbf{F} \rangle$  un oscilējošā daļa. Šajā pētījumā tiek pieņemts, ka šķidruma inerce ir pietiekami liela, lai varētu ignorēt spēka oscilējošo komponenti. To var raksturot pieprasot, lai magnētiskās mijiedarbības parametrs  $N = Ha^2/Re_\omega$  būtu mazs ( $N \ll 1$ ). Šeit, Hartmaņa skaitlis  $Ha = BL\sqrt{\sigma/\nu\rho}$  kalpo par bezdimensionālo magnētiskā lauka mēru.

Aprakstītais parametru diapazons ir raksturīgs atsevišķiem pielietojumiem, piemēram, pusvadītāju kristālu audzēšanā. Prasības  $S \leq 3$ ,



$Re_m \ll 1$  un  $N \ll 1$  parasti tiek apmierinātas arī šķidru metālu maisīšanas pielietojumos. Savukārt, prasība  $Re/Re_\omega \ll 1$  parasti neizpildās un šķidrā metāla ātrums ir jāņem vērā strāvas blīvuma aprēķinā.

Atļaujot nelielu kļūdu, var noteikt korekcijas koeficientu, kurš pieņem šķidrums rotāciju kā cietam ķermenim. Leņķiskā ātruma korekciju var atrast nosakot slīdes korekciju

$$\Omega_1 = \frac{\Omega_0}{1 + \Omega_0/\omega}, \quad (2)$$

kur  $\Omega_0 = Re U/L$  ir aprēķinātais leņķiskais ātrums bez slīdes korekcijas.

## 1.1. RPM inducētā tilpuma spēka izvedums

Tilpuma spēka izvedumā apskatam vienkāršu gadījumu ar cietiem vadītājiem un meklējam rotējoša magnētiskā lauka inducētās strāvas Faradeja indukcijas rezultātā. Modeļa raksturīgie mērogi ir  $L = r_m$ ,  $T = 1/\omega$  un  $B = B_{rem}$ . Izvedumu sākam ar  $\mathbf{B}$  izteiksmi ap cilindrisku magnētu ar šķērsvirziena magnetizāciju [17], izteiksmi bezdimensionalizējam un magnētam piešķiram vienmērīgu leņķisko frekvenci  $\omega$  (2. a att.)

$$\mathbf{B} = \left( \frac{P_r}{\pi r} \cos(\varphi - t), \frac{P_\varphi}{\pi r} \sin(\varphi - t), \frac{P_z}{\pi} \cos(\varphi - t) \right), \quad (3)$$

kur  $\varphi$  apzīmē leņķi azimutālā virzienā un  $t$  apzīmē laiku. Funkcijas  $P_r$ ,  $P_\varphi$  un  $P_z$  ir savstarpēji saistītas un satur pirmā, otrā un trešā tipa eliptiskos integrāļus. Bez slīdes un zemu frekvenču tuvinājumā  $\mathbf{B}$  un  $\mathbf{J}$  var aprakstīt ar Maksvela vienādojumiem potenciālu formā un Oma likumu [64]. Strāvas blīvuma vienādojums bezdimensionālā formā ir

$$\mathbf{J} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (4)$$

kur  $\phi$  apzīmē elektrisko skalāro potenciālu un  $\mathbf{A}$  magnētisko vektorpotenciālu. Pagaidām aplūkosim situāciju tikai stacionāra, vadoša, cieta ķermeņa gadījumā ar  $\mathbf{v} = 0$  un atstāsim teorijas papildināšanu ar ātruma ietekmi vēlākam. Divas komponentes ir pietiekami, lai definētu patvaļīgu  $\mathbf{A}$ , kas apmierina  $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ , tāpēc vienkāršības labad pielīdzināsim  $A_\varphi = 0$  un veiksīm integrēšanu

$$\mathbf{A} = \left( -\int r B_z d\varphi, 0, \int r B_r d\varphi \right) = \frac{\sin(\varphi - t)}{\pi} (-r P_z, 0, P_r). \quad (5)$$

Pieprasot lādiņa saglabāšanos  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$  vadošajā ķermenī nonākam pie

$$\nabla^2 \phi = -\nabla \cdot \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{2P_z}{\pi} \cos(\varphi - t). \quad (6)$$

Līdz ar to, elektriskā potenciāla formu pieņemam kā

$$\phi = -\frac{(f+h)}{\pi} \cos(\varphi - t), \quad (7)$$

kur  $f$  ir partikulārais atrisinājums un  $h$  vispārīgais atrisinājums.

Partikulārais atrisinājums tiek iegūts pielīdzinot  $h = 0$  un meklējot atrisinājumu vienādojumam

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{f}{r^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2P_z. \quad (8)$$

Izmantojot saistības starp funkcijām  $P_r$ ,  $P_\varphi$  un  $P_z$  iegūst atrisinājumu

$$f = r^2 \frac{\partial(\frac{1}{r} \int P_\varphi dz)}{\partial r} = r \frac{\partial(rP_f)}{\partial r}, \quad (9)$$

kur  $\int P_\varphi dz$  ir analītiski nointegrēts un atrisinājums definēts izmantojot jaunu funkciju  $P_f$ , kura satur eliptiskos integrāļus. Strāvas blīvuma robežnosacījumi tiek nodrošināti izmantojot vispārīgo atrisinājumu  $h$ , sekojoši

$$\left( \frac{\partial h}{\partial r} + P_f \right) \Big|_{r=r_1, r=r_2} = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial z} \Big|_{z=z_1, z=z_2} = 0. \quad (10)$$

Vispārīgais atrisinājums tiek meklēts veicot mainīgo atdalīšanu un izvīzot  $z$  atkarību no  $h$  Furjē rindā. To izdarot iegūstam vienādojumu

$$\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial r} - \frac{h}{r^2} - a_n^2 h = 0, \quad h = h_{00} + \sum_{n=0}^N h_n. \quad (11)$$

Vispārīgais atrisinājums patvaļīgu  $z_1$  un  $z_2$  gadījumā ir

$$\begin{cases} h_{00} = (C_{00} + C_{10})r + \frac{(C_{01} + C_{11})}{r} \\ h_n = (C_{In}I_1(a_n r) + C_{Kn}K_1(a_n r)) \cos(a_n(z - z_1)), \quad a_n = \frac{(n+1)\pi}{z_2 - z_1}, \end{cases} \quad (12)$$

kur  $I_1$  un  $K_1$  ir attiecīgi pirmā un otrā tipa modificētās Beseļa funkcijas un  $C_{00}$ ,  $C_{10}$ ,  $C_{01}$ ,  $C_{11}$ ,  $C_{Kn}$  un  $C_{In}$  ir  $r_1$  un  $r_2$  atkarīgas konstantes.

## 1.2. Modeļa validēšana un pielietojumi

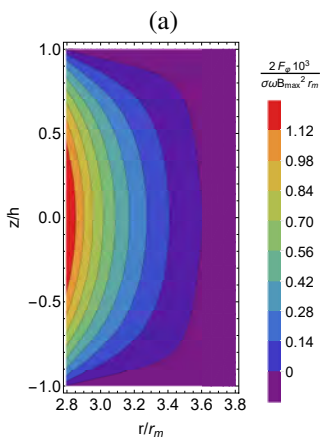
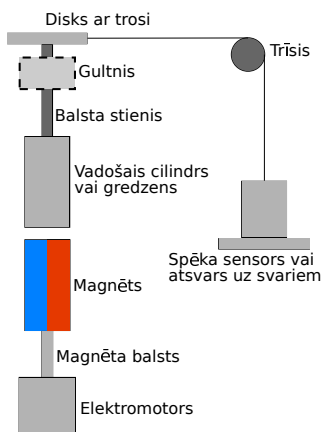
Laikā vidējotais tilpuma spēks vadošajā ķermenī ir tikai azimutālā virzienā un ir vienāds ar  $\langle \mathbf{F} \rangle = F_\varphi \mathbf{e}_\varphi$ , kur  $\mathbf{e}_\varphi$  ir azimutālais vienības vektors. Laikā vidējotā azimutālā tilpuma spēka  $F_\varphi$  attēlojums gredzena šķērsriegzumā

(3. b att.) parāda, ka spēks ir lielākoties koncentrēts robežslānī pie magnētam tuvākās sienas. Rezultātu salīdzinājumam starp dažādiem parametriem un ģeometrijām ir ērti izmantot uz vadošo ķermeni darbojošos integrālo spēka momentu  $M = \int_V r F_\varphi dV$ .

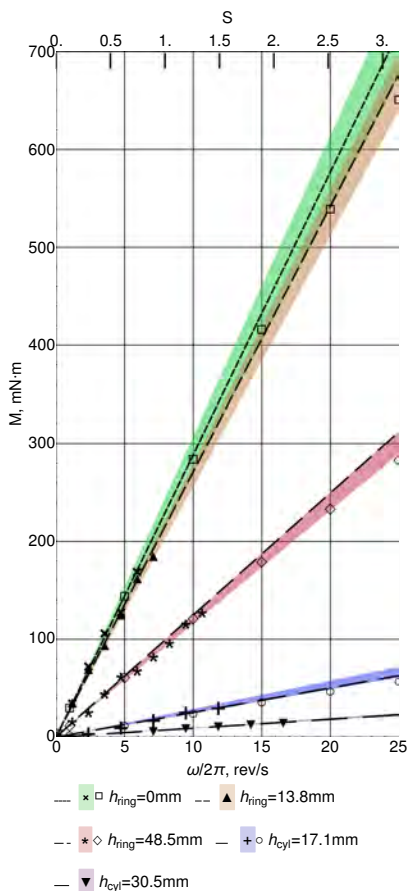
Analītiskais strāvas blīvuma un integrālā spēka momenta aprēķins tika veikts ar *Wolfram Mathematica* programmatūru un tas labi sakrīt ar skaitlisko aprēķinu uzdevuma lineārajā daļā. Izmantojot vienkāršu eksperimentālo iekārtu (3. a att.) integrālais spēka moments bija izmērīts eksperimentāli cilindriskas un gredzena formas alumīnija sakausējuma vadošiem ķermeņiem. Eksperimentālā iekārta bija izgatavota tā, lai varētu vienkārši veikt spēka mērīšanu. To nodrošināja disks ar nemainīgu 47 mm lielu spēka plecu, kas caur balsta stieni bija pievienots vadošajam cilindram vai diskam. Izmantojot programmatūru *COMSOL* uzdevums tika atrisināts skaitliski attiecīgajā eksperimentā izmantotajiem cilindra un gredzena formas vadītājiem, aprēķinā iekļaujot arī inducētā magnētiskā lauka aprēķinu trīsdimensionālā (3D) ģeometrijā.

3. c att. analītiski iegūtais integrālais spēka moments ir salīdzināts ar skaitliski un eksperimentāli iegūto aksiāli nobīdītam cilindram un gredzenam attiecīgi par  $h_{cyl}$  un  $h_{ring}$ . Caurspīdīgie sektori apzīmē trīs standarta novirzes slīpuma koeficientam eksperimentālajai spēka momenta atkarībai no frekvences. Analītiskie atrisinājumi tika mērogoti tā, lai viens no mērījumiem sakristu ar attiecīgo atrisinājumu. Tas tika darīts, jo alumīnija sakausējuma vadītspēja nebija zināma. Mērījums ar atsvaru pie  $h_{ring} = 0$  mm gredzena ģeometrijas gadījumā tika izmantots kā atskaites mērījums. Iegūtais atrisinājums ir derīgs gadījumiem, kad magnēts ir novietots uz aizpildīta vai doba cilindra (gredzena) ass, un tas ir visnoderīgākais gadījumos, kad ģeometrijas ietekme uz magnētiskā lauka sadalījumu ir ievērojama un ne magnētiskā dipola, ne bezgalīgi gara cilindra tuvinājums nesniedz vēlamos rezultātus. Atrisinājums neņem vērā pašindukciju, taču atrisinājums ir pareizs ar augstu precizitāti līdz bezdimensionālai frekvencei  $\approx 2$  un ar integrālā spēka momenta kļūdu 10 – 15% līdz bezdimensionālajai frekvencei  $\approx 3$ .

Lai arī prezentētais analītiskais atrisinājums ir paredzēts tikai mazu griešanās frekvenču gadījumiem, eksperimentālais piemērs (3. c att.) nodemonstrē, ka frekvences ir pietiekami lielas (15 apgr/s) praktiskiem pielietojumiem, kā, piemēram, šķidra metāla maisīšanai vai kulšanai. Tomēr tāda pielietojuma gadījumā, būtu jāņem vērā plūsmas ātrums. Pirmajā tuvinājumā slīdes ātrumu var ņemt vērā ar vienādojumu (2). Pie tam, veicot parametriskos aprēķinus, iegūtās precīzās magnētiskā lauka un strāvu blīvuma analītiskās izteiksmes var būt noderīgākas par skaitliskajām simulācijām.



(b)

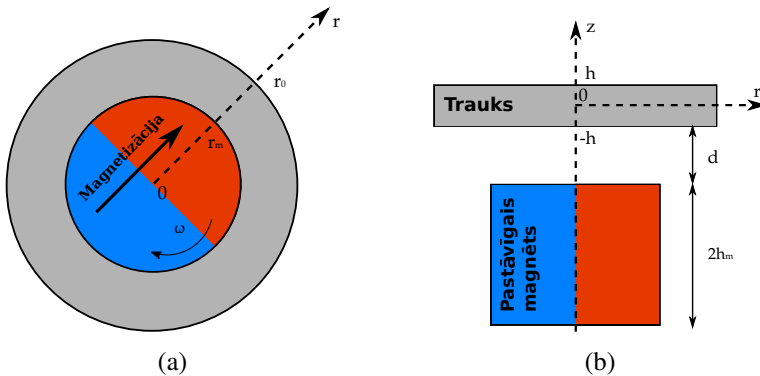


(c)

3. attēls. Eksperimenta skice (a). Analītiskais laikā vidējotais azimutālais tilpuma spēks gredzena šķērs griezumā (b). Analītiskā atrisinājuma, *COMSOL* aprēķina un eksperimentālo mērījumu ar atsvaru salīdzinājums, attēlojot attiecīgi ar pārtrauktajām līnijām, tukšajiem simboliem un aizpildītajiem simboliem (c).

## 2. RPM ierosinātā plūsma cilindriskos traukos

Šajā nodaļā RPM sistēma – rotējoša dipola magnēta gala lauks – ir apskatīta šķidra metāla plūsmas ierosināšanai koaksiālā diska formas traukā. Šī sistēma ir analizēta analītiski un skaitliski ar uzsvāri uz salīdzinājumu ar attiecīgo eksperimentālo iekārtu. RPM sistēma ierosina līdzīga veida plūsmu kā tradicionālie RML maisītāji, bet ir piemērota gadījumiem ar lielu nemagnētisko atstarpi jeb attālumu starp magnētu un metālu. Tradicionālie RML maisītāji ierosina gandrīz vienmērīgu magnētisko lauku ar spēcīgu komponenti perpendikulāri rotācijas asij. Taču gadījumos, kad šķidrā metāla trauks ir sekls, tilpuma spēku daudz efektīvāk var ierosināt ar magnētiskā lauka aksiālo komponenti. Šāda primārā magnētiskā lauka virziena izvēle ir novērojama PM sūkņu dizainā [6]. Nemagnētiskā atstarpe tiek atstāta diezgan liela, lai aplūkotā sistēma reprezentētu iespējamo industriālas iekārtas dizainu, kurā šķidrā metāla temperatūra ir daudz lielāka par apkārtējās vides temperatūru un trauks ir apklāts ar siltumizolējošu materiālu, kas palīdz izvairīties no siltuma zudumiem un apkārtējās vides sabojāšanu. Tādā gadījumā dipola magnēta sistēma ir optimālākais magnētiskā lauka avots [65, 10]. Vairāki RPM ierosinātas plūsmas aspekti nav līdz šim pētīti, jo šī metode ir relatīvi jauna. Tajā pašā laikā, RML ierosināto plūsmu teorija ir labi izveidota un var tikt izmantota, lai uz tās balstītu RPM ierosināto plūsmu pētījumu.



4. attēls. Modeļa skice: (a) skats no apakšas; (b) vertikālais šķēlums caur simetrijas asi.

Eksperimentālās iekārtas cilindriskais trauks bija izgatavots no akrila stikla trauka un piepildīts ar istabas temperatūras šķidru GaInSn eitektiku. Magnēta, kuru eksperimentā grieza ar elektrisko motoru, novietojums koaksiāli attālumā  $d$  zem cilindriskā trauka ir ilustrēts iekārtas modeļa skicē (4. att.). Lai traukā iegūtu pēc iespējas lielāku magnētiskā lauka plūsmas blīvumu

aksiālo komponenti un palielinātu maisītāja efektivitāti, dzelzs uznavu sektori ar augstumu  $l$  un biezumu  $w$  bija novietoti uz PM poliem pilnībā nenokļāot magnētu vertikālā virzienā. Lielākā daļa no analītiskajiem un skaitliskajiem aprēķiniem attiecās uz eksperimentālo iekārtu, ar kuru tie tiek salīdzināti. Līdz ar to, ja vien nav norādīts citādi, tad parametru vērtības, kuras izmantotas šīs nodaļas aprēķinos un attēlos, attiecās uz eksperimentālo iekārtu un ir apkopotas 2. tabulā. Tomēr sākotnēji tiek apskatīts magnēts bez dzelzs uznavām. Izmantojot ultraskaņas Doplera velocimetrijas (UDV) ātruma mērītāju ar eksperimentālo iekārtu, varēja iegūt azimutālā ātruma mērījumus līdz pat 3 m/s septiņās dažādās radiālajās pozīcijās ar augstu temporālo izšķirtspēju, bet sliktu telpisko izšķirtspēju vertikālā virzienā.

<i>Fizikālais lielums</i>	<i>Apzīmējums</i>	<i>Vērtība</i>
Magnēta pusaugstums	$h_m$	0.05 m
Magnēta rādiuss	$r_m$	0.06 m
Uznavu augstums	$l$	0.06 m
Uznavu biezums	$w$	0.02 m
Paliekošā magnetizācija	$B_{rem}$	1.42 T
Magnēta rotācijas frekvence	$\omega$	1.95..19.5 Hz
Attālums starp magnētu un metālu	$d$	0.038 m
Metāla cilindra pusaugstums	$h$	0.015 m
Metāla cilindra rādiuss	$r_o$	0.1 m
Elektriskā vadītspēja	$\sigma$	$3.27 \times 10^6$ S/m
Viskozitāte	$\nu$	$3.35 \times 10^{-7}$ m <sup>2</sup> /s
Blīvums	$\rho$	6400 kg/m <sup>3</sup>

2. tabula. Fizikālo lielumu vērtības, kuras izmantotas eksperimentālajā iekārtā.

Šajā nodaļā bezdimensionālie parametri ir balstīti uz raksturīgajiem mērogiem  $L = h$ ,  $T = h^2/\nu$  un  $B = B_{max}$ , kur  $B_{max} = \max(\mathbf{B})$  apzīmē PM radīto maksimālo magnētiskā lauka plūsmas blīvumu traukā. Nevienādības  $S \leq 3$ ,  $Re_m \ll 1$  un  $N \ll 1$  aptuveni izpildās eksperimentālajā iekārtā, bet tiek pieņemtas par patiesām analītiskajos un skaitliskajos aprēķinos. Lai arī prasība  $Re/Re_w \ll 1$  neizpildās, tā sākotnēji tiek pieņemta par patiesu analītiskajos aprēķinos. Savukārt, galējā analītiskā ātruma izteiksme tiek iegūta pielietojot slīdes korekciju no vienādojuma (2).

Efektīvo laikā vidējoto azimutālo spēku var aprakstīt ar  $F_\varphi = 0.5\rho\Omega_f^2 r f$ , kur  $f$  apzīmē  $r$ -atkarīgu funkciju. Gadījumā, kad  $f = 1$ , Lorenca spēks ir proporcionāls  $r$ , kas ir aptuveni patiesi, ja tiek aplūkoti RML maisītāji ar šķērsvirziena magnētisko lauku zemu frekvenču režīmos un trauki ar izmēru attiecību  $\approx 1$  [1]. Ja uzdotais spēks ir aksiāli viendabīgs, tad  $\Omega_f = B(\sigma\omega/\rho)^{\frac{1}{2}}$ . Turpretī, ja tilpuma spēkam ir izmaiņas aksiālā virzienā, tad  $z$ -atkarība var tikt

ņemta vērā ar efektīvo  $\Omega_f$ , kuru nosaka pielīdzinot faktisko integrālo spēka momentu ar tā pieņemto formu

$$\Omega_f = \sqrt{\frac{\int r(2\langle \mathbf{F} \rangle / \rho) \cdot \mathbf{e}_\varphi dV}{\int r^2 f dV}}. \quad (13)$$

## 2.1. Analītiskais apraksts

### 2.1.1. Robežslānis

Kad aksiāli simetriskā traukā ar šķidru metālu tiek ierosināts leņķiskais ātrums, veidojas gandrīz konstants impulsa moments visā trauka augstumā, pat ar ievērojamām tilpuma spēka aksiālajām izmaiņām [1]. Šim procesam ir savas līdzības ar Teilora–Praudmana (*Taylor–Proudman*) teorēmu. Tiek ierosināta spēcīga sekundārā plūsma, kuras rezultātā azimutālais ātrums tiek izlīdzināts aksiālā virzienā. Ierosinot turbulentu šķidra metāla plūsmu ar tradicionālo RML, aksiāli simetriskā traukā ierosinātais impulsa moments ir atkarīgs tikai no laikā vidējotā tilpuma spēka integrālās vērtības un var tikt raksturots ar efektīvo spēku, kas mainās lineāri atkarībā no rādiusa [1].

Radiāli lineāra tilpuma spēka gadījumā ( $f = 1$ ), robežslāņa atrisinājums ir iepriekš atrasts [1] par modeļa sistēmu izmantojot plūsmu starp diviem bezgalīgi lieliem diskām, kura aprakstīta izmantojot fon Karmana pašlīdzības mainīgos

$$\mathbf{u} = (\Omega r F_b, \Omega r G_b, \Omega h_b H_b), \quad p = 0.5 \rho \Omega^2 r^2 + \rho \Omega^2 h_b^2 P_b, \quad (14)$$

kur funkciju  $F_b$ ,  $G_b$ ,  $H_b$  un  $P_b$  arguments ir  $z/h_b$  un  $\Omega$  apzīmē leņķisko ātrumu plūsmas kodolā. Šajā formulējumā cilindra pusaugstums  $h$  kalpo par raksturīgo garuma mērogu plūsmas kodolā, bet robežslāņa garuma mērogs ir fon Karmana robežslāņa biezums  $h_b = (\nu/\Omega)^{\frac{1}{2}}$ . Šo garuma mērogu attiecība ir  $\epsilon = (\nu/\Omega)^{\frac{1}{2}}/h$ . Ievietojot mainīgos no vienādojuma (14) laikā nemainīgajā nesaspiežamu šķidrumu N–S vienādojumā

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla \left( \frac{p}{\rho} \right) + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{\langle \mathbf{F} \rangle}{\rho} \quad (15)$$

nonākam pie robežslāņa vienādojumiem

$$\begin{cases} F_b^2 + H_b F_b' - G_b^2 + 1 = F_b'' \\ 2F_b G_b + H_b G_b' = G_b'' + \frac{1}{2} \frac{\Omega_f^2}{\Omega^2} \\ H_b' + 2F_b = 0. \end{cases} \quad (16)$$

Iegūtā vienādojumu sistēma (16), kurā  $\epsilon$  pieņem par neievērojami mazu un kura noved pie spēka saskaitāmā  $0.5\Omega_f^2/\Omega^2$  likvidēšanas, ir iepriekš apskatīta un atrisināta [1]. Taču tas ko vēlamies panākt, ir izpētīt tilpuma spēka ietekmi uz robežslāņa plūsmu, tāpēc spēka saskaitāmo atstājam vienādojumu sistēmā (16) un meklējam atrisinājumus ar mazām pozitīvām un negatīvām spēka vērtībām pie robežas. Tādā gadījumā robežnosacījumi ir

$$z/h_b = 0 : F_b = G_b = H_b = 0; \quad z/h_b \rightarrow \infty : F_b = \frac{1}{4} \frac{\Omega_f^2}{\Omega^2}, \quad G_b = 1, \quad (17)$$

kur robežnosacījums  $F_b(\infty) = 0.25\Omega_f^2/\Omega^2$  seko no pieņēmuma, ka tālu prom no robežas (plūsmas kodolā) Koriolisa spēks kompensē inducēto tilpuma spēku. Vienādojums (16) tika pārrakstīts ar koordināšu transformāciju  $z = -1.5 \log(1 - z_b)$ ,  $z_b \in [0 : 1]$  un atrisināts kā robežproblēma ar *Wolfram Mathematica* iebūvēto funkciju *NDSolve* un izvēloties *Shooting* metodi.

## 2.1.2. Plūsmas kodolā

Izstrādātais analītiskais modelis RML ierosināto plūsmu aprakstam [1] aksiāli simetriskos traukos paredz aksiāli nemainīgu azimutālo plūsmu kodolā (ārpus robežslāņiem). Modeļa kodola apgabalā ātruma komponentes ir savstarpēji saistītas ar plūsmas nesaspiežamības vienādojumu

$$u_z = -\frac{z}{r} \frac{d(ru_r)}{dr}, \quad (18)$$

un spēka balansu starp Koriolisa un inducētā tilpuma spēka saskaitāmajiem

$$u_r \Gamma'(r) = F_\varphi r / \rho, \quad (19)$$

kur impulsa momenta uz masas vienību definīcija ir  $\Gamma = u_\varphi r$ . Pateicoties nesaspiežamībai, plūsmas daudzumu caur robežslāņiem, var aprēķināt kā pretējā virzienā vērstu plūsmas daudzumu caur kodola apgabalu jeb  $q = -\int_0^{r_0} 2\pi r u_z dr$ , kur integrēšana notiek līdz robežslānim, bet robežslāni varam pieņemt par ļoti mazu salīdzinājumā ar  $r_0$ . Tālāk, pielietojot nesaspiežamības vienādojumu (18), varam izteikt  $q$  izmantojot  $u_r$ . Galu galā, izmantojot spēku līdzsvara vienādojumu plūsmas kodolā (19), varam sasaitīt robežslāņa plūsmas daudzumu ar inducēto tilpuma spēku. Integrālais robežslāņu plūsmas pārnese vienādojums šādā formulējumā ir bijis atrisināts [1] un atrastā izteiksme plūsmas impulsa momentam uz masas vienību ir

$$\Gamma_c = (2 \cdot 0.0372)^{-\frac{5}{9}} \chi_1^{-\frac{1}{9}} \left( \frac{r_o^3}{r^3} \mathcal{U} \right)^{\frac{5}{9}} h^{\frac{1}{2}} \Omega_f r^{\frac{3}{2}} \left( \frac{h \Omega_f (r^3 / r_o)^{\frac{1}{2}}}{\nu} \right)^{\frac{1}{9}}. \quad (20)$$



Funkcija  $\mathcal{U}$  tika meklēta kā diferenciālvienādojuma

$$\mathcal{V}''(\mathcal{G} - \mathcal{V}) = 2\chi_1 \mathcal{G}' \mathcal{V}' \quad (21)$$

atrisinājums, kur

$$\mathcal{V}(\eta) = \int_0^\eta \mathcal{U}(\eta) d\eta, \quad \mathcal{G}(\eta) = \int_0^\eta \eta^3 f(\eta) d\eta, \quad \eta = r/r_o. \quad (22)$$

Vienādojumi (21) un (22) vēsturiski tika risināti ar tilpuma spēku, kas ir proporcionāls  $r$ , kas nozīmē  $f = 1$  [1]. Savukārt, tekošajā pētījumā esam papildinājuši vienādojumu (22) ar ieviesto funkciju  $f$  un atraduši trīs spēka funkciju

$$\begin{aligned} f_1 &= \eta^a, \\ f_2 &= 1 - \eta \text{ un} \\ f_3 &= 1 - b\eta^2 + (b-1)\eta^3 \end{aligned} \quad (23)$$

attiecīgos vienādojuma (21) atrisinājumus

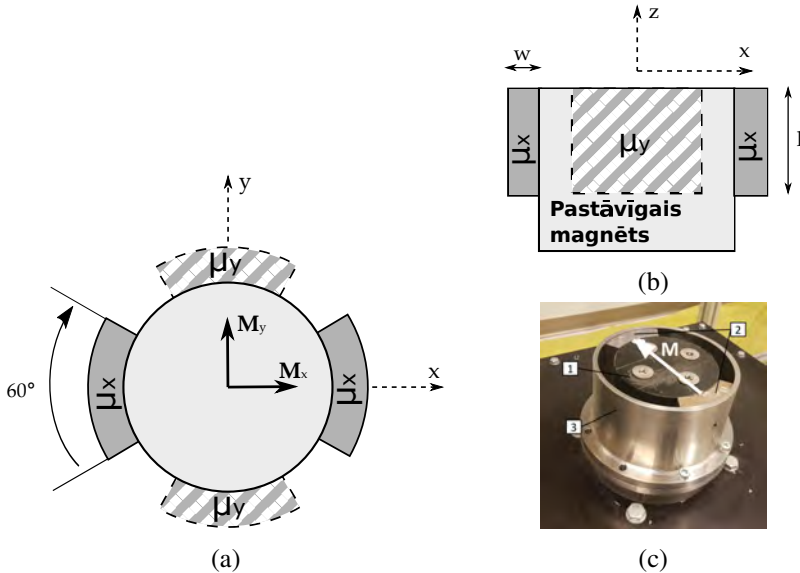
$$\begin{aligned} \mathcal{U}_1 &= \left(1 - \frac{2(a+4)}{(a+3)}\chi_1\right) \eta^{(a+3)}; & \chi_1 &= \frac{(a+3)}{2((a+4) + r_o/h)}, \\ \mathcal{U}_2 &= -\frac{1}{3}\eta^3 + \frac{1}{4}\eta^4 \text{ un} \\ \mathcal{U}_3 &= -\frac{1}{3}\eta^3 + \frac{b}{5}\eta^5 - \frac{(b-1)}{6}\eta^6. \end{aligned} \quad (24)$$

Atrisinājumi  $\mathcal{U}_2$  un  $\mathcal{U}_3$  apmierina vienādojumu (21) ar parametra vērtību  $\chi_1 = 0.5$ . Funkcija  $f_1$  vispārīgāk apraksta RML inducētā spēka sadalījumu un ievietojot parametra vērtību  $a = 0$  attiecīgajā atrisinājumā  $\mathcal{U}_1$  iegūstam vēsturiski iegūto atrisinājumu [1]. Spēka funkcijas  $f_2$  un  $f_3$  apraksta RPM inducētā spēka sadalījumu. Attiecīgie  $\mathcal{U}$  atrisinājumi ir negatīvi un vienkārši ievietojot tos vienādojumā (20) iegūtu kompleksas vērtības. Lai no tā izvairītos, tika izvēlēts ņemt vienādojuma (20) moduli  $\Gamma = |\Gamma_c|$ .

## 2.2. Skaitliskās metodes

Hidrodinamikas un elektrodinamikas aprēķiniem tika izmantoti attiecīgi *OpenFOAM* un *Elmer* atvērtās pieejas kodi. Datu pārnese starp programmām tika nodrošināta ar atvērtās pieejas kodu *EOF-Library* [63]. Laikā nemainīga nesaspiežamu šķidrums N-S vienādojuma (15) atrisinājums noslēgtā traukā tika meklēts ar “SIMPLE” algoritmu. Tika izmantots Spalarta–Almaras [66] viena vienādojuma turbulences modelis, jo salīdzinot ar vairākiem citiem RVNS modeļiem ( $k-\epsilon$ ,  $k-\omega$  un  $k-\omega SST$ ) aprēķini ar to prasīja vismazāk laika, lai reproducētu iepriekšēja pētījuma atrisinājumu [1], kas līdz ar to atļāva veikt plašāku parametrisko aprēķinu.

Hydrodinamikas aprēķiniem tika izmantots strukturēts 3D režģis, kas sastāvēja no  $\approx 1.7$  miljoniem elementu. Kopumā EM aprēķinu 3D režģis bez uzmaivām sastāvēja no  $\approx 160$  tūkstošiem elementu un ar uzmaivām no  $\approx 280$  tūkstošiem elementu. Lai aprēķinātu laikā vidējoto spēku, tika izmantots *Elmer* harmoniskais skaitliskais risinātājs ar laika atkarību  $\exp(i\omega t)$ , kur  $i$  ir imaginārā vienība. Kompleksā magnetizācija tika definēta kā  $\mathbf{M} = (\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y)B_{rem}/\mu_0$ . Reālā magnetizācijas daļa modelē pagrieziena leņķi, kurā magnēta poli ir  $x$ -virzienā, bet imaginārā daļa modelē magnēta polu pozīciju  $y$ -virzienā.



5. attēls. Uzmaivu apgabali harmoniskajā skaitliskajā risinātājā: (a) skats no augšas; (b) skats no sāna. Eksperimentā izmantotais magnēts ar uzmaivām: 1 – pastāvīgais magnēts, 2 – feromagnētiskās uzmaivas, 3 – nerūsējošā tērauda ietvars (c).

Magnētiskais vektorpotenciāls un elektriskais potenciāls tiek iegūts ar harmonisko skaitlisko risinātāju atrisinot vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} \mathbf{J}_k = -i\omega\sigma\mathbf{A}_k - \sigma\nabla\phi + \sigma\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{A}_k) \\ \nabla \times \left( \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A}_k \right) = \mathbf{J}_k + \nabla \times \mathbf{M}_k, \end{cases} \quad (25)$$

kur pievienotie indeksi  $k = 1, 2$  atbilst divām atšķirīgām vienādojumu sistēmām. Risinot tālāk,  $\mathbf{B}$  var iegūt aprēķinot magnētiskā vektorpotenciāla rotoru.

Eksperimenta iekārtā feromagnētiskās uzmaivas ir piestiprinātas uz

magnēta poliem (5. c att.), kas efektīvi palielina magnēta rādiusu un līdz ar to inducēto tilpuma spēku. Uzmavas ir novietotas tā, lai pilnībā nenoklātu magnētu vertikālā virzienā (5. b att.), tādējādi palielinot vertikālo magnētiskā lauka plūsmas blīvumu šķidrā metāla trauka virzienā. Uzmavu magnētiskajai caurlaidībai jābūt pareizi uzdotai katrā ceturtdaļā no rotācijas perioda (5. a att.). Lai to panāktu skaitliskajā aprēķinā, harmoniskais skaitliskais risinātājs tika sekojoši modificēts. Pirmajā vienādojumu sistēmā ( $k = 1$ ) atrisinām tikai piesesumu no magnetizācijas vektora  $x$ -virziena komponentes, kura ir  $\mathbf{M}$  reālā daļa. Tādā gadījumā iegūstam

$$\mathbf{M}_1 = M_x \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_x B_{rem} / \mu_0 = \mathcal{R}e(\mathbf{M}), \quad \mu_x = \mu_{ferro}, \quad \mu_y = \mu_0, \quad (26)$$

kur uzmavas  $x$ -virzienā ir feromagnētiskas, bet uzmavas  $y$ -virzienā ir nemagnētiskas (domēns reprezentē vakuumu). Līdzīgi, otrajā vienādojumu sistēmā ( $k = 2$ ) risinām tikai piesesumu no magnetizācijas vektora  $y$ -virziena komponentes, kur šajā gadījumā paliek tikai  $\mathbf{M}$  imaginārā daļa. Iegūstam

$$\mathbf{M}_2 = M_y \mathbf{e}_y = -i \mathbf{e}_y B_{rem} / \mu_0 = i \mathcal{I}m(\mathbf{M}), \quad \mu_x = \mu_0, \quad \mu_y = \mu_{ferro}, \quad (27)$$

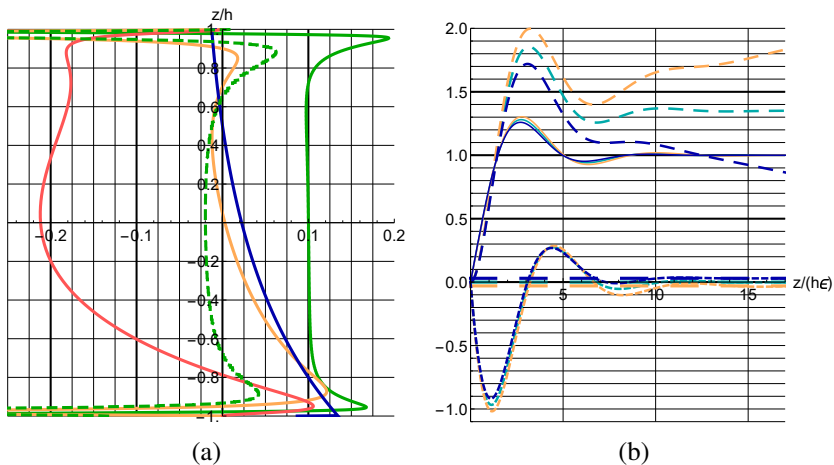
kur šoreiz  $y$ -virziena uzmavas ir feromagnētiskas, bet  $x$ -virziena uzmavas ir nemagnētiskas. Feromagnētisko uzmavu magnētiskā caurlaidība  $\mu_{ferro}$  tiek risināta no dzelzs H–B līknes. Rezultējošais vektorpotenciāls un skalārais potenciāls tiek iegūts kā abu vienādojumu sistēmu atrisinājumu summa

$$A = A_1 + A_2, \quad \phi = \phi_1 + \phi_2. \quad (28)$$

### 2.3. Rezultāti un diskusija

6. a att. ir parādīts mērogots azimutālais un aksiālais ātrums un spēku balansa vienādojuma komponentes. Viskoza saskaitāmais spēku balansa vienādojumā kļūst svarīgs cilindra centra tuvumā. Piemēram, koordinātēs  $r/r_o = 0.2$  Koriolisa spēks kopā ar viskozo saskaitāmo kompensē šķidrumu dzenošo spēku apgabalā, kas ir tālāk prom no trauka sienām  $z/h \in [-0.7, 0.7]$ . Ar RPM no apakšas ierosinātas plūsmas skaitliskie aprēķini (6. a att.) demonstrē samērā negaidītu rezultātu – ātruma maksimums atrodas pie plūsmas ierosinātajam jeb RPM pretējās sienas. Taču skaidrojumu sniedz asimptotiskie robežslāņu atrisinājumi, kas kvalitatīvi sakrīt ar skaitliskajiem rezultātiem. 6. b att. demonstrē, ka plūsmu dzenoša (pozitīva) tilpuma spēka klātbūtne pie vertikālajām trauka robežām samazina azimutālā ātruma pīķa vērtību. Turpretī plūsmu bremsējoša (negatīva) spēka klātbūtne palielina azimutālā ātruma pīķa vērtību.

Integrālo spēka momentu salīdzinājums dažādu trauka izmēru attiecību gadījumā norāda, ka maisīšana no apakšas kļūst efektīvāka samazinot trauka augstumu. Taču trauka augstuma samazināšana ietekmē arī plūsmas radiālo



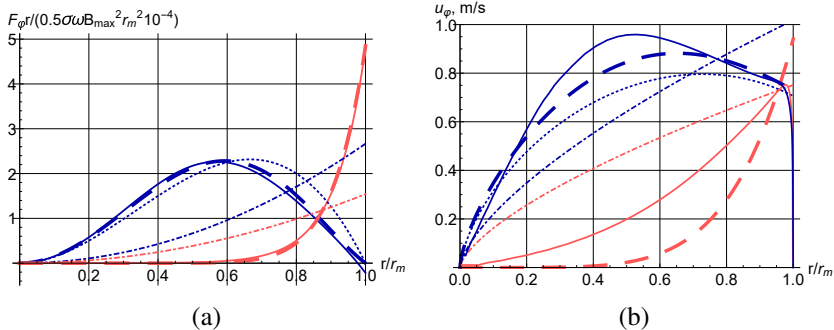
6. attēls. Plūsmas raksturlielumu sadalījumi: (a) izteiksmju  $\Gamma' u_r / (\Omega r)^2$ ,  $(\nu + \nu_t) \nabla^2 u_\varphi / (\Omega^2 r)$ ,  $F_\varphi / (\Omega^2 \rho r)$ ,  $u_z / (10 \Omega h \epsilon)$  un  $u_\varphi / (\Omega r) - 0.9$  aksiālais sadalījums pie  $r/r_o = 0.2$  ar  $d = 0.15$  un  $h = 0.03$  ir attiecīgi attēlots ar gaiši oranžu, tumši zaļu pārtrauktu, tumši zilu, gaiši sarkanu un tumši zaļu līniju; (b) asimptotiskie robežslāņa atrisinājumi  $G_b$ ,  $H_b$ ,  $2F_b$  un spēka saskaitāmais attēloti attiecīgi ar nepārtrauktām, īsi-pārtrauktām, punktotām un gari-pārtrauktām līnijām gadījumos ar spēka saskaitāmo  $0.5 \Omega_f^2 / \Omega^2 = -0.03$  (gaiši oranžs), 0 (ciāna) un 0.03 (tumši zils).

sadalījumu. Kamēr ar RPM no apakšas maisītā trauka augstuma-diametra attiecība ir  $\approx 1$ , spēka radiālais sadalījums neietekmē azimutālā ātruma radiālo sadalījumu. Tādā gadījumā rezultējošo azimutālā ātruma sadalījumu var izskaidrot ar jau esošo RML ierosinātās plūsmas teoriju, kura pieņem radiāli lineāru spēka sadalījumu [1]. Turpretī, aplūkojot sekus traukus ar augstuma-diametra attiecību  $\ll 1$ , skaitliski aprēķinātais un eksperimentāli izmērītais azimutālais ātrums demonstrē, ka spēka radiālais sadalījums ietekmē ātruma sadalījumu.

7. a att. kopā ar vairākām  $f$  funkcijām, kurām  $\Omega_f$  ir aprēķināts no vienādojuma (13), ir demonstrēta laikā vidējtā azimutālā spēka momenta analītiskā atrisinājuma vidējā vērtība pa augstumu atkarībā no radiālās koordinātes. RML inducētā spēka sadalījums atbilst spēka funkcijai  $f_1$  ar parametru  $a = 8.64$ . Savukārt, RPM inducētā spēka sadalījums atbilst spēka funkcijām  $f_2$  un  $f_3$  ar parametru  $b = 2.63$ . Piemērā, kur trauka izmēru attiecība ir  $h/r_o = 1$ , analītiskais apraksts ar  $f = 1$  ir diezgan apmierinošs. Turpretī aplūkotās eksperimentālās iekārtas gadījumā ar mazu augstuma-diametra attiecību  $h/r_o = 0.15$  spēka radiālais sadalījums kļūst

svarīgs un analītiskie atrisinājumi ar funkcijām  $f_2$  un  $f_3$  daudz labāk atbilst azimutālā ātruma profilam (7. b att.).

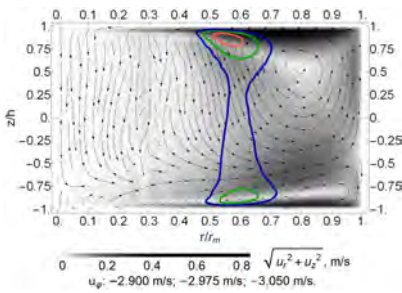
Aplūkotajā RPM maisītāja iekārtā (4. att.) ir attiecība  $r_m/r_o = 0.6$ , kas noved pie inducētā spēka momenta maksimuma pie  $r/r_o = 0.6$  (7. a att.). Pie tam azimutālā ātruma maksimums arī ir tuvu pie  $r/r_o = 0.6$  (7. b att.). Rezultāts ir kvalitatīvi atšķirīgs no tradicionālā RML inducētās plūsmas, kurā ātruma maksimums ir pie trauka radiālās sienas.



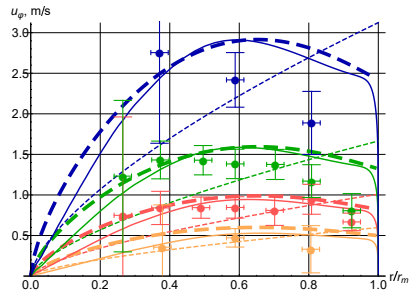
7. attēls. Inducētā spēka momenta (a) un azimutālā ātruma (b) radiālais sadalījums RPM (tumši zils) un vienmērīga RML (gaiši sarkans) maisītāja gadījumā: precīzais/skaitliskais rezultāts,  $f = 1$ ,  $f = f_2$  (RPM) attiecīgi attēlots ar nepārtrauktu, punktoti-svītrotu un punktotu līniju, kā arī  $f = f_1$  (RML) un  $f = f_3$  (RPM) attēloti ar biežām pārtrauktām līnijām.

Lai noteiktu efektīvos parametrus, kuri atbilstu magnētu sistēmai ar dzelzs uzdevām, tika izmantots 1. nodaļā iegūtais zemo frekvenču analītiskais spēka atrisinājums. Tika atrasts, ka pētītās iekārtas gadījumā (5. att.) palielinot magnēta rādiusu par 12.5%, kas atbilst  $r_m = 0.0675$ , iegūstam tādu pašu magnētiskā lauka un inducētā spēka sadalījumu kā magnētam pievienojot uzdevas. Skaitliskie aprēķini parāda, ka, pievienojot uzdevas, tilpuma spēka maksimums pie trauka apakšējās sienas palielinās par 15.8% un integrālais spēka moments par 27.8%. Tam seko, ka RPM ierosinātais plūsmas ātruma maksimums traukā palielinās par 6%–11%, līdz ar to palielinot maisītāja efektivitāti.

Skaitliski aprēķinātā no apakšas ierosinātā plūsma seklos cilindros (7. a att.) paredz azimutālā ātruma maksimālo vērtību pie  $r = r_o/2$  ar pīķi pie augšējās sienas. Asimetriskais meridionālo virpuļu sadalījums rodas Koriolisa spēkam kompensējot inducētā tilpuma spēka aksiālo sadalījumu, sekojot vienādojumam (19). Taču meridionālā plūsma kodolā ir pārāk vāja ( $< 10\%$  no azimutālā ātruma), lai spētu ietekmēt azimutālo ātrumu. Cita situācija ir pie robežām, kur meridionālās plūsmas maksimums ir  $\approx 30\%$  no azimutālā ātruma maksimālās vērtības, bet tur nelinearitātes var aprakstīt ar



(a)



(b)

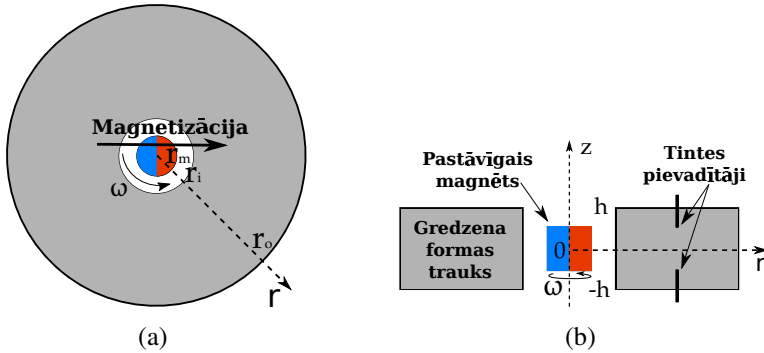
8. attēls. Skaitliski aprēķinātās meridionālās plūsmas absolūtās vērtības un vektoru grafiks kopā ar dažiem azimutālā ātruma kontūriem pie ātruma maksimuma vērtībām attēlots vertikālā šķēlumā pie magnēta rotācijas frekvences 19.5 apgr./s (a).  $u_\varphi$  radiālais sadalījums pie  $z = 0$  un magnēta rotācijas frekvences 1.95 apgr./s (gaiši oranžs), 3.9 apgr./s (gaiši sarkans), 7.8 apgr./s (tumši zaļš) un 19.5 apgr./s (tumši zils), kas iegūts analītiski ar  $f = 1$ ,  $f = f_3$ , skaitliski un eksperimentāli, ir attēlots attiecīgi ar punktotām, pārtrauktām, biežām nepārtrauktām līnijām un aizpildītajiem apliem (b).

asimptotiskajiem robežslāņu vienādojumiem (16).

Tika noskaidrots, ka apvienojot RPM inducētā spēka analītiskā spēka izteiksmi ar RML inducētās plūsmas aprakstu [1], iegūstam ātruma radiālo sadalījumu, kas labi sakrīt ar skaitliskajiem un eksperimentu rezultātiem (8. b att.). Kā bija sagaidāms, labāka ātruma profila sakrītība tika iegūta ar funkciju  $f_3$ , kura azimutālā spēka sadalījumu apraksta precīzāk par funkciju  $f_2$ . Eksperimentālo kļūdu nogriežņi 8. b att. parāda trīs standartnovirzes no vidējā iegūtā ātruma ar UDV. Savukārt, radiālā virziena kļūdu nogriežņi ir UDV zondes stara platumā dēļ. Analītiski un skaitliski iegūto ātruma profilu galvenie raksturlielumi labi sakrīt ar eksperimenta mērījumiem un visi rezultāti norāda, ka radiālās sienas virzienā ātruma profila slīpums ir negatīvs, kas, savukārt, norāda uz ātruma profila maksimumu tuvāk cilindra centram pie aptuveni  $r = r_o/2$ . Līdz ar to, ir parādīta kvalitatīva nesakrītība, salīdzinot ar ātruma profilu gadījumā, kad cilindra izmēru attiecība ir  $\approx 1$ .

### 3. Plūsmas nestabilitāte un bistabilitāte gredzenveida formas traukā

Šajā nodaļā tiek aplūkota RPM ierosinātā plūsma to aptverošā gredzenā (9. att.). Šī konfigurācija bija izvēlēta tādēļ, ka lielākoties magnētiskā lauka līnijas visos virzienos noslēdzas caur metālu. Tādējādi PM tiek efektīvi izmantots. Šī konfigurācija atbilst arī centrālās sūkņa [11, 7], taču atkarībā no ģeometriskajiem parametriem var darboties arī kā efektīvs maisītājs. Par raksturīgajiem mērogiem izvēlamies  $L = h$ ,  $T = h^2/\nu$  un  $B = B_{max}$ . Vienkāršības labad, gredzena iekšējo rādiusu un pusaugstumu izvēlamies par vienādiem ( $r_i = h$ ).



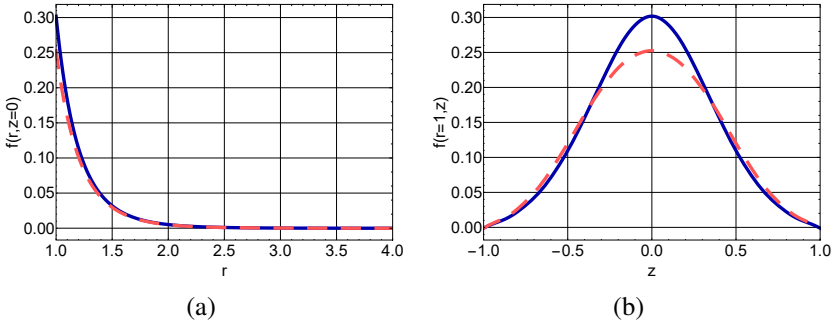
9. attēls. Modeļa skice: (a) skats no augšas; (b) vertikālais šķēlums caur simetrijas asi.

Modelī pieprasām, lai izpildās nosacījumi  $Re/Re_\omega \ll 1$ ,  $Ha \ll 1$  un  $S \ll 1$ . No tā seko, ka  $Re_m \ll 1$  un  $N \ll 1$  arī izpildās. Ar šiem pieņēmumiem EM spēka loma ir tikai plūsmas ierosināšanā un tas nav atkarīgs no šķidrums ātruma. Rezultātā laikā vidējotais tilpuma spēks ir aksiāli simetrisks ar vienīgo no nulles atšķirīgo komponenti azimutālā virzienā, kuru izmantojot Teilora skaitļa definīciju  $Ta = 0.5Ha^2Re_\omega$  bezdimensionālā formā var izteikt kā  $Ta f(r, z) = (h^3/\nu^2\rho)F_\varphi$ . Bezdimensionālais N–S vienādojums tad ir pierakstāms kā

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla \tilde{p} + \nabla^2 \mathbf{v} + Ta f(r, z) \mathbf{e}_\varphi, \quad (29)$$

kur  $\tilde{p} = p/P$  ir bezdimensionālais spiediens. Lai modeli papildus vienkāršotu, izvēlamies vienādu magnēta pusaugstumu un rādiusu ( $h_m = r_m$ ). RPM ierosinātā tilpuma spēka sadalījumam  $f(r, z)$  ir izteikts maksimums pie  $z = 0$  un  $r = r_i$ , kas ir svarīgs nosacījums, lai veidotos radiāla strūkļa [67]. Izmantojot

analītisko tilpuma spēka atrisinājumu, tika noskaidrots, ka ar eksperimentālās iekārtas parametriem  $r_o/h = 0.54$  galīga izmēra magnētu labi apraksta dipola tuvinājums (10. att.).



10. attēls. Ar magnētiskā dipola tuvinājumu (tumši zilās nepārtrauktās līnijas) un ar galīga izmēra magnētu ar  $r_o/h = 0.54$  (sarkanās pārtrauktās līnijas) inducētā tilpuma spēka sadalījums: (a) radiāli pie  $z = 0$ ; (b) aksiāli pie  $r = 1$ .

### 3.1. Skaitliskās metodes

Vienādojuma (29) atrisinājums tika atrasts veicot TSS ar divām neatkarīgām skaitliskajām metodēm: *OpenFOAM* un spektrālajām metodēm. *OpenFOAM* režģis tika izveidots ar *Gmsh* programmatūru un saturēja strukturētus sešskaldņus. Aprēķini, atkarībā no geometrijas un  $Ta$ , tika veikti ar  $(0.9..7.2) \times 10^5$  elementiem. Rezultātu saglabāšanas intervāls bija 0.005 viskozā laika vienībās. Kā alternatīva tika izmantota 3D spektrālo aprēķinu programma ar  $(0.7..1.8) \times 10^5$  telpiskās izšķiršanas punktiem un rezultātu saglabāšanas intervāls mainījās no 0.0025 līdz 0.015 atkarībā no  $Ta$ .

Sākotnējā pētījumā tika noskaidrots, ka lielāka gredzena rādiusu attiecība  $R = r_o/r_i$  noved pie zemāka kritiskā  $Re$ . Turklāt, pie  $R > 3.2$  un pietiekami liela  $Ta$  veidojas divi savstarpēji simetriski atrisinājumi. Lai samazinātu parametru daudzumu un pārliciecinātos atrastos režīmā, kurā veidojas divi simetriskie stāvokļi, tālākais pētījums tika veikts tikai vienai gredzena rādiusu attiecībai  $R = 4$ . Tam papildus tika pētīta plūsmas atkarība no  $Ta$ .

Plūsmas virziens – pulksteņrādītāja virzienā vai pretēji – atbilst diviem dominējošiem sistēmas atraktoriem. Sistēma ir simetriska attiecībā pret vertikālo pusplakni, līdz ar to tika izvēlēts atainot  $\mathbf{v}_z(r, \varphi, z = 0)$  atkarību no Teilora skaitļa, lai veidotu bifurkāciju diagrammu. Histerēzes cilpa tika atrasta aprēķinot sistēmas dekrementu. Vadošā sistēmas īpašvērtība  $\lambda_r + i\lambda_i$  tika noteikta pielīdzinot aprēķinātā ātruma laika atkarību izsekošanas punktā funkcijai  $f_{inst}(t) = A + B \sin(\lambda_i t + \varphi) \exp(\lambda_r t)$ . Pēc tam, kad tika sasniegts periodisks



atrisinājums,  $Ta$  tika samazināts ar maziem soļiem līdz periodiskā atrisinājuma vietā atgriezās stacionārais atrisinājums.

Pie lielākām  $Ta$  vērtībām plūsma pāriet uz ieslēgts–izslēgts intermitējošo režīmu, kurā sistēmas mainīgo īsie intermitējošie uzliesmojumi pēc kāda nejauša laika noved pie sistēmas pārejas no viena atraktora uz otru. Kad sistēma ir haotiskās pārslēgšanās režīmā, svārstību amplitūda ir salīdzināma ar paša signāla vērtību. Līdz ar to, ir nepieciešami dati no gariem laika intervāliem, lai spētu daudz maz pārliecinoši atšķirt stāvokļus. Lai atšķirtu sistēmas atraktorus, pirmkārt, tika samazināts troksnis, no zondēm iegūtos, laika signālus punktos  $(r, z) = (2.5, \pm 0.5)$  atņemot vienu no otra. Apzīmējot iegūto signālu ar  $s_0$  tas tālāk tika normalizēts pēc

$$s_1 = (s_0 - \langle s_0 \rangle) / (2\langle |s_0| \rangle) + 0.5, \quad (30)$$

kur ar  $s_1$  ir apzīmēts normalizētais signāls. Rezultātā signāla vērtība 0 atbilst vienam atraktoram, bet vērtība 1 otram atraktoram. Pēdējā solī, tika izvēlēts sliekšņa lielums  $\Delta_{th}$  un laika soļi sakārtoti ar algoritmu

$$s_2(t) = \begin{cases} 0, & s_1(t) < 0.5 - \Delta_{th} \\ s_1(t - \Delta t), & 0.5 - \Delta_{th} \leq s_1(t) \leq 0.5 + \Delta_{th} \\ 1, & s_1(t) > 0.5 + \Delta_{th}. \end{cases} \quad (31)$$

Kārtošanu atkarībā no zondes signāla var interpretēt kā nulto iterāciju. Lai uzlabotu rezultātus, tika izmantota pār visu tilpumu integrēta ātruma pulsāciju kinētiskās enerģijas attiecība pret katru no atraktoriem jeb  $e_i = 0.5(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{v}_i - \mathbf{v})$ , kur indeksi  $i = 1, 2$  apzīmē laikā vidējos ātrumus attiecībā pret katru no stāvokļiem. Visa procedūra tika iteratīvi atkārtota un atrasts, ka relatīvā kļūda pēc vienas vai divām iterācijām ir mazāka par 1%. Līdz ar to, varam uzskatīt, ka sakārtotie ātruma leņķu signāli no zondēm jau reprezentē sistēmas režīmu. Vēl vienam integrālajam mēram – pa trauka tilpumu vidējotai azimutālajai virpuļainībai

$$\Omega_\varphi = \frac{1}{V} \int_V (\nabla \times \mathbf{v}) e_\varphi dV \quad (32)$$

arī vajadzētu norādīt, kurā atraktorā sistēma atrodas.

Lai izpētītu sistēmas statistisko dabu, tika apkopoti  $\tau$  – laika intervāli starp pārslēgšanos no vienādojuma (31) sakārtotajiem laika signāliem. Tālāk, tika izvēlēts pārslēgšanās laika solis  $\Delta\tau$ , to definējot, kā dalāmu ar minimālo iegūto pārslēgšanās intervālu  $\Delta\tau = k \min(\tau)$ , kur  $k$  apzīmē reizināšanas koeficientu. Visbeidzot, tika atrasts pārslēgšanās gadījumu skaits  $N(\tau)$  intervālos  $\tau \in (n\Delta\tau, (n+1)\Delta\tau]$ , kur  $n = 0, 1..n_{max}$  un  $n_{max} = \text{ceiling}(\max(\tau)/\Delta\tau)$ .

## 3.2. Eksperimentālās metodes

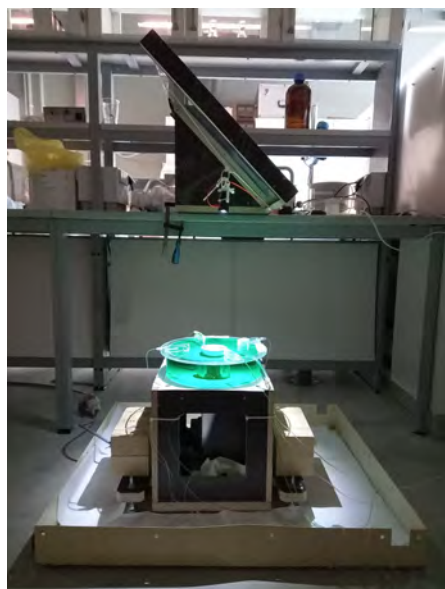
Lai plūsmas virzienu novērotu eksperimentāli, pamatā bija paredzēts izmantot caurspīdīgu elektrolītu un ievadīt kontrastvielu caur zondēm. Sālsskābei ir laba vadītspēja vidējās koncentrācijās, to salīdzinot ar citām skābēm [68] un, vēl jo vairāk, salīdzinot ar sāls šķīdumiem. Kā kompromiss starp drošību (10.4% w.w) un elektrisko vadītspēju ( $\sigma = 71 \text{ S/m}$ ) [68] tika izvēlēta 3-mol/dm<sup>3</sup> HCl šķīduma koncentrācija.

Atrast uzticamu metodi plūsmas virziena noteikšanai bija daudz grūtāk. Sākotnēji tika apsvērts variants ar zīda pavedienu pielīmēšanu pie iekšējā rādiusa sienas. Taču tiem bija tendence sapīties un izrādījās, ka tiem ir pārāk liela inerce, lai būtu izmantojami tik lēnas plūsmas režīmos. Vēl viens variants bija šķīdumā ievadīt tinti. Kā variants bija kālija permanganāts, jo tas reaģē ar HCl veidojot caurspīdīgu šķīdumu. Diemžēl, reakcijā rodas arī burbuļi, kas ātri noklāj trauka augšējo sienu un aizsedz skatu. Papildus tam, pēc vairākām stundām šķīdums piesātinās ar tumši brūnu krāsu, kas padara plūsmas virziena novērošanu vēl grūtāku. Kā alternatīva plūsmas novērošanai tika apsvērts pH indikators Bromfenola zils. Tā krāsa mainās no tumši zila uz gaiši dzeltenu, kad šķīduma pH mainās no sārmaina uz skābu. Tomēr indikatora izmantošana bija ierobežota tikai pavisam nelielā attālumā no zondes, jo krāsas maiņa notiek pārāk ātri, lai izveidotos tintes “aste”, kuru var atpazīt fotogrāfijā. Pie tam, pēc vairākām stundām šķīdums piesātinās, kas ierobežo eksperimenta ilgumu.

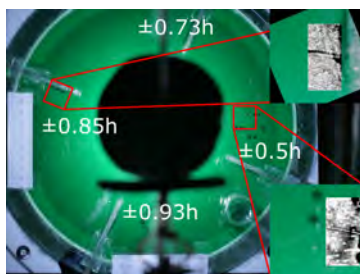
Sākotnējos eksperimentos parādījās vēl dažas problēmas. Viena no tām bija, ka, lai gan medicīniskās adatas ir izgatavotas no nerūsējošā tērauda, tās reaģēs ar koncentrētu skābi. Tas, savukārt, nozīmē, ka mainīsies zondes novietojums, radīsies burbuļi un šķīdums iekrāsosies dzelzs(III) hlorīdam raksturīgajā tumši brūnā krāsā. Vēl viena problēma bija spiediena izmantošana plūsmas nodrošināšanai caur zondēm. Vairākām zondēm vienlaikus tika izmantots viens medicīniskais enterālās barošanas maiss, kas noveda pie tā, ka dažas zondes nestrādāja, jo zondēm bija atšķirīgas hidrauliskās pretestības. Pie tam, spiediena nodrošināšana ar augstumu starpību noveda pie spiediena samazināšanās eksperimenta laikā. Rezultātā, zondes ar lielāku hidraulisko pretestību pārstāja darboties.

Vēl viens pamats bažām bija no zondēm izplūstošā šķīduma blīvums salīdzinājumā ar blīvumu traukā esošajam šķīdumam, kas varētu novest pie smaguma spēka ierosinātas plūsmas un izjaukt galveno plūsmu. Sākotnējos eksperimentos HCl šķīduma blīvums tika samazināts tam pievienojot alkoholu maisījumu (65% etanols un 35% izopropanols). Tomēr, pārbaudīt daudzas šķīdumu kombinācijas bija grūti alkohola gaistamības dēļ. Kā arī, rezultējošo šķīdumu fizikālās īpašības literatūrā nebija atrodamas.

Lai izvairītos no iepriekš minētajām problēmām, eksperimenta iekārtai tika veikti vairāki uzlabojumi. Šķīdums traukā tika izveidots no tām pašām sastāvdaļām, kuras traukā ieplūda caur zondēm. Papildus tam, tika izvēlēta



(a)



(b)



(c)

11. attēls. Eksperimenta iekārta: (a) skats no sāna; (b) spoguļskats no augšas un pietuvināts iekrāsotā šķīduma skats; (c) sūknis ar tā vadības sistēmu.

tāda krāsvielā, kura nereaģē ar HCl. Tas nodrošināja, ka šķīdums traukā paliek nemainīgs visu eksperimenta ilgumu. Šķīdumi, kas izplūda no divām sondēm, tika iekrāsoti ar  $\text{CuCl}_2$ , bet šķīdumi no pārējām sešām sondēm ar  $\text{ZnCl}_2$ .  $\text{CuCl}_2$  un  $\text{ZnCl}_2$  sāļiem ir līdzīgi blīvumi, kas atviegloja šķīdumu blīvumu vienādošanu. Šķīdums ar  $\text{CuCl}_2$  ir zaļgans un tam bija tintes loma, savukārt,  $\text{ZnCl}_2$  šķīdums ir caurspīdīgs un tam bija krāsas atšķaidīšanas loma, lai šķīdums traukā būtu gaišāks. Izvēlētā  $\text{CuCl}_2$  koncentrācija  $c_{\text{CuCl}_2} = 1.5 \text{ mol/dm}^3$  balstījās uz novēroto krāsas intensitāti šķīdumam, kas, sagatavots lielos tilpumos, izskatījās pietiekami tumšs, lai kalpotu par tinti. Taču eksperimentā, kur šķīdums tika ievadīts mazos daudzumos,  $\text{CuCl}_2$  šķīduma krāsas intensitāte nebija pietiekama, lai to atšķirtu no pārējā šķīduma traukā. Šī problēma tika atrisināta izmantojot punktveida gaismu emitējošo diodi, kura panāca, ka no sondēm izplūstošā plūsma veidoja izteikti asas ēnas. Ēnas tika izmantotas, lai noteiktu plūsmas virzienu, kas pavēra iespēju plūsmas novērošanai izmantot ne tikai divas sondes ar  $\text{CuCl}_2$  šķīdumu, bet gan visas astoņas sondes.

Izvēlētajam  $\text{CuCl}_2$  un HCl šķīdumam  $25^\circ\text{C}$  temperatūrā aprēķinātais blīvums un viskozitāte ir attiecīgi  $\rho = 1215 \text{ kg/m}^3$  un  $\nu = 1.333 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  [69]. Eksperimentāli tika noteikts, ka  $\text{ZnCl}_2$  šķīdumam nepieciešama

$c_{ZnCl_2} = 1.89 \text{ mol/dm}^3$  koncentrācija, lai novienādotu šķīdumu blīvumus un izvairītos no smaguma spēka ietekmes. Balstoties uz rupju aprēķinu, elektriskā vadītspēja eksperimentā izmantotā koncentrēta  $\text{CuCl}_2$  un  $\text{ZnCl}_2$  maisījuma ar  $\text{HCl}$  gadījumā atbilst  $4\text{-mol/dm}^3$   $\text{HCl}$  šķīduma vadītspējai  $\sigma = 80 \text{ S/m}$ .

Šķīdums traukā tika ievadīts caur termosarūkošajām caurulēm, kuras bija novietotas dažādos augstumos  $z = \pm 0.5\text{h}, \pm 0.73\text{h}, \pm 0.85\text{h}$  un  $\pm 0.93\text{h}$ , kur  $h = 0.037 \text{ m}$ , kā arī aksiāli pretējās zondes bija nobīdītas par  $22.5^\circ$ , lai tās varētu atšķirt (11. b att.). Katrs pāris ar zondēm bija savstarpēji nobīdīts par  $90^\circ$  un atradās radiālajā pozīcijā  $r = (r_i + r_o)/2$ . Tika izgatavots sūknis, kas vienlaicīgi spiestu astoņas šļirces, no kurām katra bija paredzēta savai zondei (11. c att.). Šļirces bija novietotas uz lineārā aktuatora, kas pārvietojās ar  $1 \mu\text{m/s}$  un nodrošināja nemainīgu  $1.95 \text{ mm/s}$  ātrumu šķīdumam, kas no zondēm ieklūda traukā.

Virš eksperimenta  $45^\circ$  leņķī bija novietots spogulis, kas atļāva trauku novērot no augšas atrodoties drošā attālumā. Digitālā kamera tika novietota  $5 \text{ m}$  attāluma no spoguļa un ierakstīja trauka skatu no augšas fotografējot ar laika intervāliem (11. a att.). Eksperiments tika ierakstīts uzņemot divas sekojošas fotogrāfiju sērijas, kurās intervāls starp attēlu uzņemšanu bija  $4 \text{ s}$  un katra no attēlu sērijām ilga  $11 \text{ h}, 6 \text{ min}$  un  $36 \text{ s}$ .

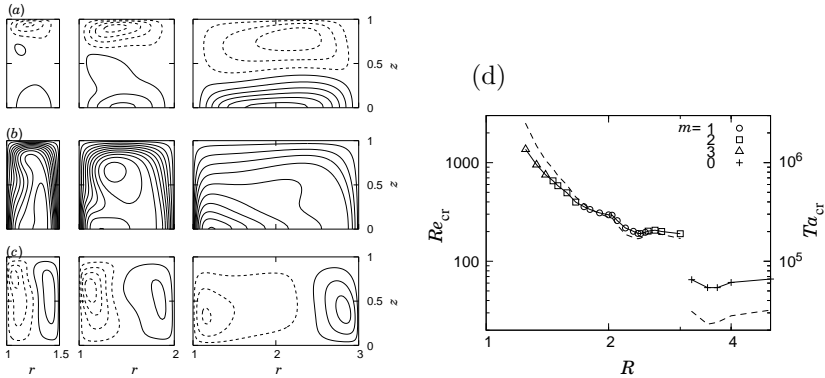
Saglabātie attēli tika stabilizētas ar programmu *Blender* (pieejama <https://www.blender.org/>). Tikai apgabali pie zondēm tika saglabāti. Papildus, attēli tika konvertēti uz pelēko toņu skalū un to kontrasts palielināts. Tika izmantots programmas *ImageJ* spraudnis *Ridge detection* [70, 71], lai apstrādātajos attēlos atrastu līnijas. Pēc tam līniju koordinātas tika eksportētas un plūsmas virziens tika noteikts aproksimējot katru līniju ar taisni un nosakot tās slīpuma koeficientu.

## 3.3. Rezultāti un diskusija

### 3.3.1. Skaitliskie rezultāti

Vispirms, tika atrasta saistība starp kritisko  $Re$  un gredzena rādiusu attiecību ( $R = r_o/r_i$ ). Tika iegūts, ka lielāka rādiusu attiecība noved pie mazākiem kritiskajiem  $Re$  (12. d att.). Plūsma plānos gredzenos, kad  $R < 2$ , ir līdzīga vienmērīga RML ierosinātajai, labi zināmajai plūsmai ar gandrīz cietķermeņa rotāciju tās centrā (12. a att.). Turpretī plata gredzena gadījumā, kad  $R > 3$ , vidusplaknē veidojas izteikta uz āru vērsta radiāla strūkļa, kura samazina plūsmas stabilitāti, un šķidrums tiek vairāk maisīts kā sūknēts. Kā iespējams strūkļa rašanās skaidrojums varētu būt, ka Teilora–Praudmana teorēma neizpildās viskozajos robežslāņos pie  $r_i$ , kur ir koncentrēts tilpuma spēks. Pie konfigurācijas, kurā  $R$  ir mazs, trauka ģeometrija uzspiež pietiekami lielu sekundāro plūsmu, lai nodrošinātu mehānismu impulsa momenta pārnesei. Padziļinātāku izpratni var gūt salīdzinot azimutālā virziena spēku

balansa vienādojumu (13. att.). Kad  $R = 1.5$ , līdzīgi plūsmai cilindros tilpuma spēku lielākoties kompensē Koriolisa spēks un robežslāņi izveidojas pie trauka vertikālajām robežām (13. b att.). Turpretī plata gredzena gadījumā tilpuma spēks ir mazākas kārtas lielums (13. a att.). Šajā gadījumā, Koriolisa un konvektīvais spēks ir vadošie saskaitāmie spēku balansa vienādojumā.

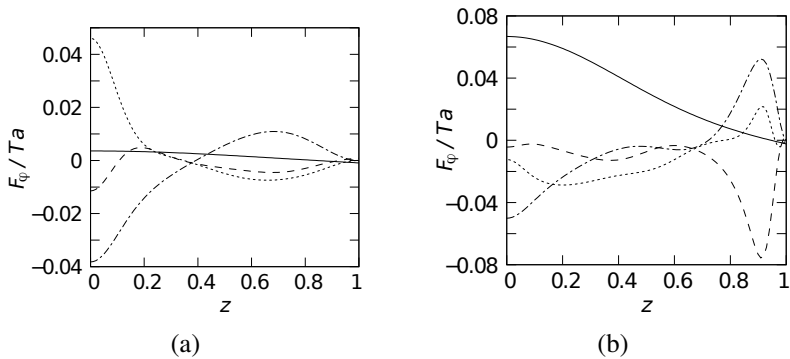


12. attēls. Radiālā (a), azimutālā (b) un aksiālā (c) ātruma izolīnijas gandrīz kritiskai plūsmai pie  $R = 1.5, 2$  un  $3$  skatoties no labās puses uz kreiso. Izolīniju solis ir 10% no maksimālā ātruma jeb 58.3, 29.6 un 19 attiecīgi pie  $R = 1.5, 2$  un  $3$ . Raustītās līnijas attēlo negatīvas vērtības. Kritiskais Reynoldsa skaitlis  $Re_{cr}$  (nepārtrauktās līnijas) un kritiskais spēka parametrs  $Ta_{cr}$  (pārtrauktas līnijas) atkarībā no gredzena rādiusu attiecības, kur  $m$  ir nestabilākās perturbācijas azimutālais viļņu skaitlis (d).

Tālāk apskatām, kā nestabilitāte tiecas uz turbulenci, pakāpeniski palielinot magnētisko spēku vēl platāka gredzena gadījumā. Šo geometriju raksturo ievērojams kritiskā EM spēka parametra kritums un nestabilitātes dabas maiņa. Gredzenos ar lielu rādiusu attiecību ( $R > 3.2$ ) plūsma ievērojami zaudē stabilitāti kritiskajam spēka parametram samazinoties trīs reizes (12. d att.).

Pie maziem Teilora skaitļiem uz vidusplaknes izveidojas radiāla strūkļa, un tā ir simetriska attiecībā pret gredzena augstumu. Kad Teilora skaitli palielina līdz  $Ta = 2.7 \times 10^4$ , notiek bifurkācija, kas sadala atrisinājumu divos atzaros, kuros plūsma ir noliekusies vai nu uz augšu vai apakšu (14. a att.).

Spektrālo metožu un *OpenFOAM* aprēķinu rezultāti labi sakrīt. Piemēram, *OpenFOAM* aprēķini norāda, ka zemkritiskie periodiskie atrisinājumi parādās pie  $Ta = 5.8 \times 10^4$  ar  $\lambda_i^{cr} = 8.95$ . Līdzīgi rezultāti tika iegūti ar spektrālajām metodēm, ar kurām iegūtā kritiskā vērtība  $Ta_{cr} = 5.485 \times 10^4$  un  $\lambda_i^{cr} = 9.137$  (14. b att.). Ar *OpenFOAM* aprēķiniem periodiskais atrisinājums saglabājas spēka parametram samazinoties līdz  $Ta = 4.5 \times 10^4$ , bet stacionārais atrisinājums atgriežas pie  $Ta = 4.4 \times 10^4$ . Rēķinot ar spektrālajām metodēm

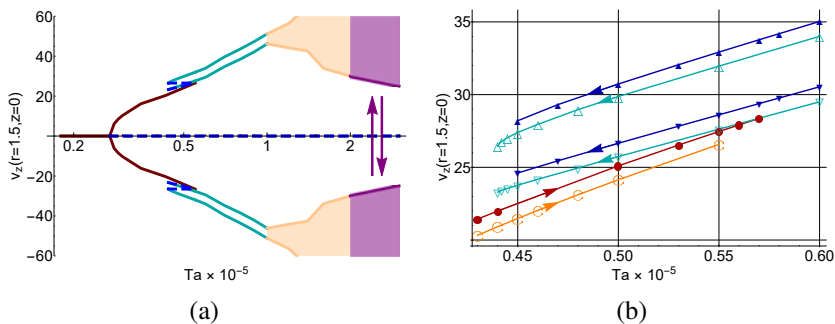


13. attēls. Azimutālais spēku balanss pamatplūsmai nedaudz zem kritiskā sliekšņa vertikālā šķēlumā pie  $r = 2$  ar  $R = 3$ ,  $Ta = 1.7 \times 10^5$  (a) un  $r = 1.25$  ar  $R = 1.5$ ,  $Ta = 7.4 \times 10^5$  (b). Konvektīvais, Koriolisa, viskozaiss un magnētiskais saskaitāmais stacionārajam  $v_\phi$  atrisinājumam attēlots attiecīgi ar punktotu, punktoti-svītrotu, pārtrauktu un nepārtrauktu līniju. Visu līniju summa ir vienāda ar nulli.

notiek līdzīgi, kur periodiskais atrisinājums saglabājas līdz  $Ta = 4.4 \times 10^4$ , bet stacionārais atrisinājums atgriežas pie  $Ta = 4.39 \times 10^4$  (Fig. 14. b).

Trešā nestabilitāte izveidojās pie  $Ta = 1.2 \times 10^5$  (14. a att.), bet virs  $Ta = 2 \times 10^5$  sistēma pāriet turbulentā stāvoklī ap vienu no spoguļsimetriskajiem atzariem, kur fluktuāciju enerģija brīžiem ir pietiekami liela, lai ierosinātu pāreju uz otru atraktoru (15. a att.). Enerģiju starpība starp abiem atzariem ievērojami pārsniedz tipisko fluktuāciju enerģiju, kā rezultātā intervāli starp pārslēgšanos ieilgst līdz pat 100 viskozā laika vienībām (15. a att.). Pie tam ir iespējams novērot arī ļoti īsas vai pat neizdevušās pārejas (15. a att. pie  $t = 25, 130, 210$ ). Pie lielākiem  $Ta$  turbulentās svārstības palielinās un pārejas notiek aizvien biežāk (15. b att.), līdz fluktuāciju enerģija ir līdzīga izmēra kā enerģiju starpība starp atraktoriem (nav parādīts).

Turbulentās bistabilitātes režīmā piemērota pieeja ir vidējot plūsmu ap katru no stāvokļiem, jo laikā vidējošana visa eksperimenta garumā varētu novest pie secinājumiem, kuri neraksturo aplūkoto sistēmu. Labs sistēmas plūsmas stāvokļa indikators ir radiālās un aksiālās plūsmas zondes. Zondes var kalpot kā sākotnējais tuvinājums, kuru pēc tam var iteratīvi uzlabot, sakārtojot plūsmas stāvokļus pēc to enerģiju starpībām (Fig. 15. b) tekošajā tuvinājumā. Aplūkotajai sistēmai šāda sakārtošana mainījās mazāk par 1% pēc pirmās vai otrās iterācijas. Trokšņa klātbūtnes gadījumā daudz uztveramāku grafiku var iegūt pielietojot slīdošo vidējo. Kā redzams 15. b attēlā, no zondēm iegūtais slīdošais vidējais labi sakrīt ar signālu  $s_2$  no sakārtotajām enerģiju starpībām un vidējoto azimutālā virziena virpuļainību, kura aprēķināta no vienādojuma (32). Pēc tam laikā

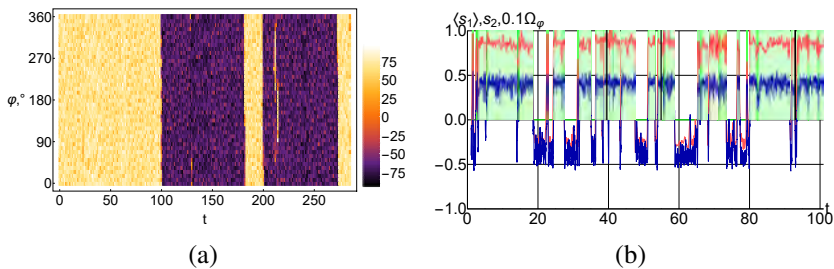


14. attēls. Bifurkācijas diagramma: (a) globālais skats, kur stacionārais, periodiskais, aperiodiskais, ieslēgti-izslēgti intermitējošais režīms un netieši noteiktie repelleri ir attiecīgi attēloti ar sarkanu, ciānu, gaiši oranžu, violetu un zili pārtrauktu līniju; (b) *OpenFOAM* (aizpildītie simboli) un spektrālo metožu (tukšie simboli) rezultātu salīdzinājums pie histerēzes cilpas, kur stacionārais atrisinājums, maksimālās periodiskā atrisinājuma vērtības un minimālās periodiskā atrisinājuma vērtības ir attēlotas attiecīgi ar aplīem, augšupvērstiem trijstūriem un lejupvērstiem trijstūriem.

vidējoto plūsmu un ātrumu fluktuācijas var aprēķināt attiecībā pret atdalītajiem stāvokļiem. Neatdalītā  $v_r$  un ātruma fluktuāciju laikā vidējošana (16. a,c att.) noved pie kvalitatīvi atšķirīgas rezultātu interpretācijas salīdzinot ar vidējošanu attiecībā pret katru no “uz augšu” vai “uz apakšu” atraktoriem (16. b,d att.). 16. a,c att. interpretācija ir, ka meridionālajā plaknē ir divi mazi spoguļsimetriski virpuļi ar lielām fluktuācijām. Savukārt, 16. b,d att. noved pie secinājuma, ka meridionālajā plaknē ir viens liels virpulis, kuram piemīt mazākas fluktuācijas un kurš ik pa laikam maina virzienu. TSS paņēmiens varētu palīdzēt identificēt sistēmas stāvokļus, taču TSS prasa daudz datora resursus un ne vienmēr ir realizējams. Prezentētais zemu  $Re$  piemērs varētu palīdzēt izstrādāt un testēt alternatīvas metodes.

Statistiskā sistēmas dabu var atklāt apkopojot laika intervālus starp režīmu pārslēgšanos un to biežumu attēlojot log–log grafikā. Sistēmas  $N(\tau)$  ir attēlots kopā ar ģeomagnētiskās apvēršanās (ĢA) intervāliem [55] (17. a att.). Līdzīgi ĢA un daudzām citām sistēmām dabā arī pētītās sistēmas  $N(\tau)$  seko  $-3/2$  likumam.

Ārējo faktoru ietekme uz sistēmu netika pētīta, bet varam secināt, ka sistēmas haotiskā daba pati par sevi ir pietiekošs faktors, lai izraisītu pāreju. Iespējams variants, kā paredzēt pārejas, varētu būt vairāku laika atkarību salīdzināšana tieši pirms notiek pārslēgšanās un mēģināt identificēt kādas līdzības, ja tādas ir, norāda uz tuvojošos pārejas notikumu.



15. attēls. Telpiski-temporālā diagramma ātruma vertikālajai komponentei pie  $r = 1.5$ ,  $z = 0$  un  $Ta = 2 \times 10^5$  (a). Salīdzinājums starp aprēķinātajiem laika signāliem pie  $Ta = 5 \times 10^5$ , kur ar sarkanu, zaļu un tumši zilu ir attiecīgi attēlots plūsmas leņķa slīdošais vidējais signāls no zondēm  $\langle s_1 \rangle$ , iegūtais binārais signāls vidējojojot fluktuāciju enerģiju attiecībā pret katru atraktoru  $s_2$  un vidējā azimutālā virziena virpuļainība  $0.1\Omega_\varphi$  (b).

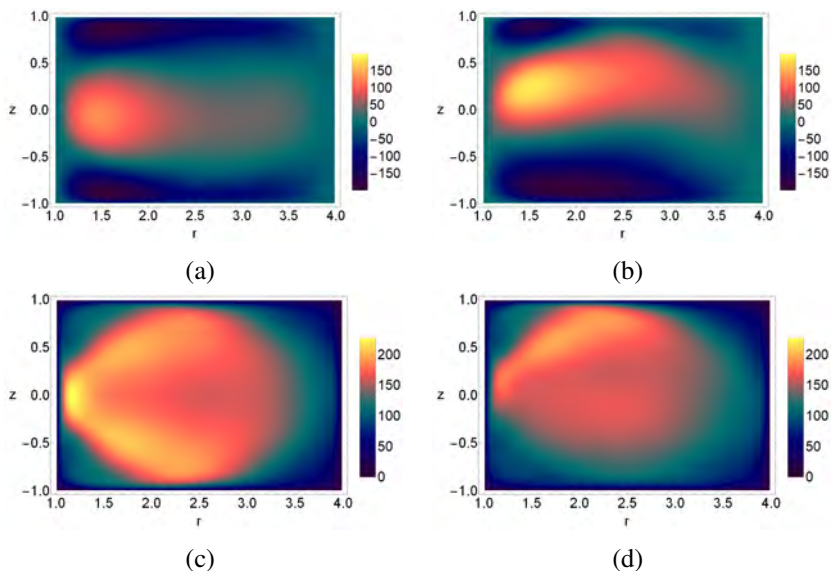
### 3.3.2. Eksperimentālie rezultāti

No apstrādātajiem attēliem iegūtais krāsvielas plūsmas radiālā-azimutālā ātruma attiecības laika grafiks ir trokšņains (18. a,c att.). Līdz ar to, papildus ierakstītajam signālam tika pievienots arī tā slīdošais vidējais. Eksperimenta rezultāti parāda, ka plūsmas ilgstoši dod priekšroku vienam stāvoklim pēc  $t \approx 33$ . Pēc šī momenta, visas zondes šķiet norāda, ka uz āru vērsta radiālā strūkļa atrodas trauka augšējā daļā. Lai gan mazāk pārliecinoši, izskatās, ka pirms šī momenta strūkļa dod priekšroku pretējam virzienam, tādējādi norādot uz notikušo režīma maiņu. Skaitliskie rezultāti (18. b,d att.) parāda, ka intervāli starp pārslēgšanās notikumiem var pārsniegt 50 bezdimensionālas laika vienības. Līdz ar to, tikai vienas pārslēgšanās novērojums visa 22 h garā eksperimenta laikā ir pieņemams, bet tajā pašā laikā neintuitīvs rezultāts. Papildus tam, rezultāts, ka lielākas turbulētās fluktuācijas attiecībā pret vidējo signālu ir novērojamas pie horizontālajām sienām, ir kopīgs gan eksperimentam (18. a att.), gan skaitliskajiem aprēķiniem (18. b att.).

Eksperimentā noteikto īso pārslēgšanās intervālu statistiskā analīze parāda, ka grafika slīpums seko  $-3/2$  zem  $\tau = 0.05$ , bet slīpums ir stāvāks pie lielākiem  $\tau$  (17. b att.). Viens no iespējamajiem izskaidrojumiem varētu būt, ka datu apstrāde ieviesa troksni, kas radīja kļūdainus pārslēgšanās intervālus. Lai samazinātu trokšņa ietekmi, tika izmantots slīdošais vidējais  $\langle s_1 \rangle$ , ar kuru tika atgūts  $-3/2$  slīpuma koeficients.

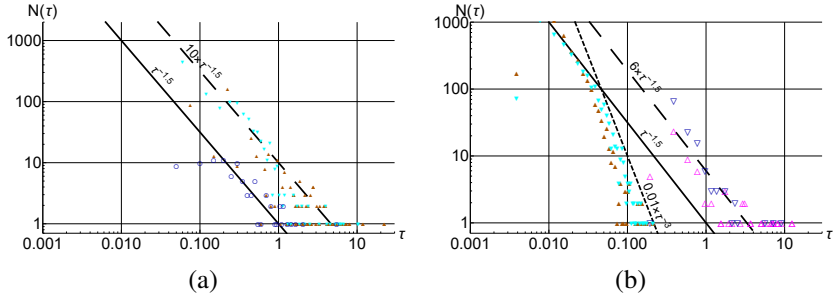
Lielas nesakritības starp skaitliskajiem un eksperimenta rezultātiem netika novērotas. Tajā pašā laikā, netika arī novēroti pārliecinoši rezultāti, kas apstiprinātu režīmu maiņu. Viens no galvenajiem faktoriem, kas varētu būt novedis pie šāda rezultāta, ir grūtības nodrošināt netraucētus eksperimenta



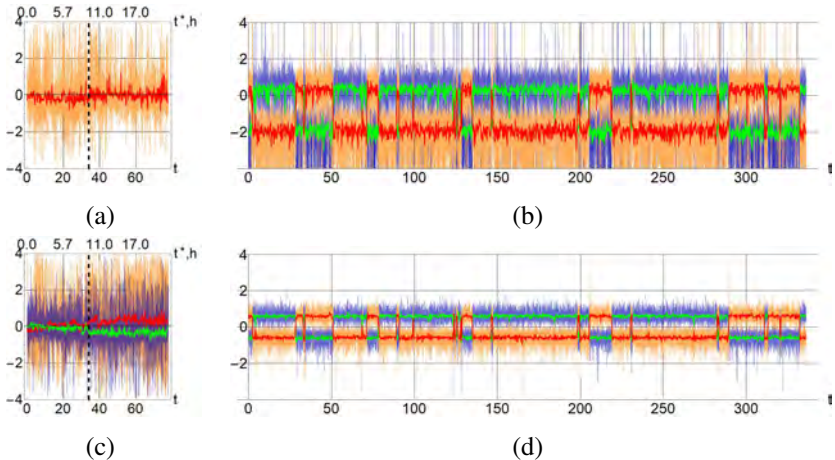


16. attēls. Laikā vidēdotās vērtības pie  $Ta = 10^6$ .  $v_r$  vidējots: (a) neatdalot; (b) tikai pa “uz augšu” atraktora laikiem. Ātruma fluktuācijas vidējas: (c) neatdalot; (d) tikai pa “uz augšu” atraktora laikiem.

nosacījumus tik ilga eksperimenta laikā. Nevar tikt izslēgta arī nelabvēlīga ietekme no zondēm, kā arī karstums no motora. Viens no iespējamiem turpmāko pētījumu variantiem būtu samazināt viskozo laika mērogu, izvēloties mazāku eksperimenta trauku. Tādā gadījumā piemērotāk būtu eksperimentu veikt ar istabas temperatūras šķidro metālu un izmantot UDV.



17. attēls. Aprēķinātie  $\tau$  biežumi pie  $Ta = 2 \times 10^5$  un  $3 \times 10^5$ , un ĢA dati attēloti attiecīgi ar augšpvērstiem trijstūriem, lejupvērstiem trijstūriem un neaizpildītiem apliem, kur dati apstrādāti ar  $k = 5$  (a). Eksperimentā iegūtie  $\tau$  biežumi no zondēm augstumos  $\pm 0.5h$  (augšpvērstie trijstūri) un  $\pm 0.75h$  (lejupvērstie trijstūri), kur dati sakārtoti ar  $s_1$  (aizpildītie simboli) un  $\langle s_1 \rangle$  (tukšie simboli), kā arī visi dati apstrādāti izmantojot  $k = 1$  (b).



18. attēls. Eksperimenta un skaitlisko aprēķinu salīdzinājums. Eksperimentālie rezultāti ar magnēta rotācijas frekvenci 70 apgr./s, kas atbilst  $Ta = 2.6 \times 10^5$  (a,c), kur  $t^* = th^2/\nu$  apzīmē dimensionālo laiku. Skaitliskie rezultāti no zondēm pie  $Ta = 3 \times 10^5$  (b,d). Zondes novietotas koordinātās: (a)  $z = 0.93h$ ; (b)  $z = \pm 0.93h$ ; (c,d)  $z = \pm 0.5h$ .

## Secinājumi

Izvestais analītiskais atrisinājums gadījumiem ar elektriski vadošu cilindru un gredzenu, kuriem koaksiāli novietots RPM, var tikt pielietots kā rīks, lai ātri iegūtu inducēto strāvu un tilpuma spēku vizualizācijas. Atrisinājuma analītiskā forma pieļauj ātru analīzi kādā no modeļa ģeometrisko parametru diapazoniem. Pie tam, analītiskais spēka atrisinājums tika izmantots, lai analītiski izteiktu azimutālā ātruma profilu seklos cilindriskos traukos, un tas varētu potenciāli tikt izmantots, lai papildinātu arī citus analītiskos atrisinājumus.

Tika parādīts, ka teorija, kas apraksta ar RML ierosināto turbulento plūsmu aksiāli simetriskos traukos var tikt pielietota RPM ierosinātām plūsmām, ja augstuma-diametra attiecība  $\approx 1$ . Turpretī seklu cilindru gadījumā ar izmēru attiecību  $\ll 1$ , tilpuma spēka sadalījums ietekmē azimutālā ātruma radiālo profilu. Ņemot vērā spēka radiālo sadalījumu teorijā, tika parādīts, ka ātruma maksimālā vērtība ir tuvāk cilindra centram pie  $r = r_o/2$ . Tas atšķiras no tradicionālā RML ierosinātās plūsmas, kur ātruma maksimums ir pie radiālās sienas. Skaitliski aprēķinātā un eksperimentāli izmērītā azimutālā ātruma radiālie profili apstiprina šo rezultātu. Skaitliskie aprēķini parādīja, ka, pievienojot uzmavas uz magnēta poliem, palielinās aksiālā magnētiskā lauka plūsma pie cilindriskā šķērsvirzienā magnetizēta PM galiem. Tādējādi palielinās efektīvais magnēta rādiuss un maisīšanas efektivitāte. Eksperimentāli izmērītais spiediens uz trauka radiālās robežas apstiprina šos skaitliski iegūtos rezultātus. Ar robežslāņa atrisinājumiem un skaitliskajiem aprēķiniem tika iegūts, ka, cilindriskos traukos maisot šķidru metālu no apakšas ar koaksiālu RPM, trauka augšējās un apakšējās robežas tuvumā rodas dažādu stiprumu vai pat atšķirīgas zīmes tilpuma spēks, kas, savukārt, noved pie azimutālā ātruma pīķa tuvu pie augšējās trauka robežas.

Tika noskaidrots, ka RPM ierosinātas plūsmas stabilitāte koaksiālā gredzena formas traukā samazinās palielinot gredzena ārējo rādiusu, bet pie lielākām gredzena iekšējā un ārējā rādiusa attiecībām par 3.2 ir novērojama bistabilitātes parādība. Tas, ka sistēmai piemīt bistabilitāte, nozīmē, ka eksistē vairāki ilgdzīvojoši stāvokļi, un, līdz ar to, varētu būt izskaidrojums dažkārt sliktajai veiktspējai aprēķinos ar laikā vidējotajiem turbulences modeļiem, kuri meklē vienu laikā vidējotu stāvokli. Šajā pētījumā aplūkotajai sistēmai ar RPM ierosinātu plūsmu gredzena formas kanālā bistabilitāte piemīt pie maziem  $Re$ , kas pavēra iespēju plašam TSS pētījumam. Divi stabilie atraktori aplūkotajā sistēmā izpaužas kā radiāli uz āru vērstās strūklas noliekšanās uz augšu vai uz leju. Laikā vidējotā plūsma – vertikālā virzienā simetrisks atrisinājums ar strūklu uz vidusplaknes – apraksta nestabilu plūsmas stāvokli. Tādējādi, turbulences modelim, kas meklē laikā vidējotu plūsmu, tas visdrīzāk sagādās grūtības.

Aprēķini parādīja, ka pat bez ārējo faktoru iedarbības pietiek tikai ar sistēmas haotisko dabu, lai ierosinātu režīmu maiņu. Eksperimentā iegūtais

laika signāls norādīja uz ilglaicīgu plūsmas izmaiņu, bet bistabilitāte netika pārliecinoši novērota. Neraugoties uz to, tika atrasts, ka raksturīgi ieslēgts–izslēgts intermitējošai parādībai laika intervālu starp pārslēgšanās notikumiem biežums sekoja  $-3/2$  slīpumam log–log grafikā gan skaitliskajiem, gan eksperimentālajiem datiem. Var secināt, ka piedāvātā sistēma varētu kalpot par ērtu modeli, lai attīstītu metodes, kuras paredzētas tālākai parādības prognozēšanai, identificēšanai un skaidrošanai.

## Tēzes

1. Ar bistabilitātes parādību varētu skaidrot dažkārt slikto veikspēju aprēķinos ar turbulences modeļiem, kuros izmantots laikā vidējotais apraksts. Divu stabilu atrektoru klātbūtnē, kur sistēma var pavadīt ilgu laiku katrā no atraktoriem, laikā vidējais stāvoklis var būt nestabils. Līdz ar to, turbulences modeļiem, kuri meklē laikā vidējoto stāvokli, varētu būt grūtības nonākt līdz atrisinājumam.
2. Piedāvātajam turbulentas bistabilitātes pētīšanas modelim – RPM ierosināta plūsma gredzena kanālā – bistabilitātes parādība piemīt pie maziem Reynolds skaitļiem, tādējādi, paverot iespēju veikt plašus TSS pētījumus. Līdz ar to, modeļi var izmantot, lai attīstītu metodes, kuras paredzētas tālākai parādības prognozēšanai, identificēšanai un skaidrošanai.
3. Izvestais analītiskā spēka atrisinājums var būt noderīgs rīks RPM inducēto strāvu un tilpuma spēka parametriskajiem aprēķiniem. Kā tas tika nodemonstrēts iegūstot analītisku atrisinājumu, RPM ierosinātai azimutālajai plūsmai cilindriskos traukos, strāvu analītiskā forma paver iespēju tālāk attīstīt saistītu fizikālu parādību analītiskos aprakstus.

## Literatūras saraksts

- [1] P. A. Davidson. Swirling flow in an axisymmetric cavity of arbitrary profile, driven by a rotating magnetic field, *Journal of Fluid Mechanics* **245** (Dec. 1992), pp. 669–699. DOI: 10.1017/S0022112092000624.
- [2] P. A. Davidson. Magnetohydrodynamics in materials processing, *Annual Review of Fluid Mechanics* **31**, no. 1 (1999), pp. 273–300. DOI: 10.1146/annurev.fluid.31.1.273.
- [3] D. Vizman. “23 - Flow Control by Magnetic Fields during Crystal Growth from Melt”, *Handbook of Crystal Growth (Second Edition)*. Ed. by P. Rudolph. Second Edition. Handbook of Crystal Growth. Boston: Elsevier, 2015, pp. 909–950. ISBN: 978-0-444-63303-3. DOI: 10.1016/B978-0-444-63303-3.00023-7.
- [4] I. Grants, V. Galindo, and G. Gerbeth. Linear and non-linear stability of melt flows in magnetic fields, *The European Physical Journal Special Topics* **220** (Mar. 2013), pp. 215–225. DOI: 10.1140/epjst/e2013-01809-0.
- [5] P. Schwesig, M. Hainke, J. Friedrich, and G. Müller. Comparative numerical study of the effects of rotating and travelling magnetic fields on the interface shape and thermal stress in the VGF growth of InP crystals, *Journal of Crystal Growth* **266** (May 2004), pp. 224–228. DOI: 10.1016/j.jcrysgro.2004.02.049.
- [6] I. Buceniĳks. Perspectives of using rotating permanent magnets for electromagnetic induction pump design, *Magnetohydrodynamics* **36**, no. 2 (2000), pp. 151–156.
- [7] I. Buceniĳks. High pressure and high flowrate induction pumps with permanent magnets, *Magnetohydrodynamics* **39**, no. 4 (2003), pp. 411–418. DOI: 10.22364/mhd.39.4.4.
- [8] I. Buceniĳks. “Perspectives of Increasing Efficiency and Productivity of Electromagnetic Induction Pumps for Mercury Basing on Permanent Magnets”, *14th International Conference on Nuclear Engineering*. Vol. 2: Thermal Hydraulics. Miami, Florida, USA, Jan. 2006, pp. 185–189. DOI: 10.1115/ICONE14-89193.
- [9] E. Koroteeva, M. Šĉepanskis, I. Buceniĳks, and E. Platacis. Numerical modeling and design of a disk-type rotating permanent magnet induction pump, *Fusion Engineering and Design* **106** (2016), pp. 85–92. ISSN: 0920-3796. DOI: 10.1016/j.fusengdes.2016.03.030.

- [10] T. Beinerts, A. Bojarevičs, R. Baranovskis, M. Milgrāvis, and I. Kaldre. Permanent magnet dipole stirrer for aluminium furnaces, *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering* **424** (Oct. 2018), p. 012037. DOI: 10.1088/1757-899X/424/1/012037.
- [11] L. Goldsteins, I. Buceniēks, and L. Buligins. A simplified model of the centrifugal electromagnetic induction pump (CEMIP) with rotating permanent magnets, *Magnetohydrodynamics* **50**, no. 2 (2014), pp. 165–178. DOI: 10.22364/mhd.50.2.5.
- [12] T. Beinerts, I. Buceniēks, A. Bojarevičs, and Y. Gelfgat. Possibility to use cylindrical pumps with permanent magnets in metallurgical facilities for aluminium alloys, *Magnetohydrodynamics* **51**, no. 4 (2015), pp. 757–770. DOI: 10.22364/mhd.51.4.9.
- [13] P. A. Davidson, D. Kinnear, R. Lingwood, D. J. Short, and X. He. The role of Ekman pumping and the dominance of swirl in confined flows driven by Lorentz forces, *European Journal of Mechanics B-Fluids - EUR J MECH B-FLUID* **18** (July 1999), pp. 693–711. DOI: 10.1016/S0997-7546(99)00106-5.
- [14] V. Dzelme, M. Ščepanskis, V. Geža, A. Jakovičs, and M. Sarma. Modelling of liquid metal stirring induced by four counter-rotating permanent magnets, *Magnetohydrodynamics* **52**, no. 4 (2016), pp. 461–470. DOI: 10.22364/mhd.52.4.3.
- [15] A. Gaile. “An Experimental Study of Electromagnetically Induced Liquid Metal Flow for Aluminium Transport and Degassing in a Linear Channel”. MA thesis. University of Latvia, 2021. URL: <https://dspace.lu.lv/dspace/handle/7/55988>.
- [16] A. Bojarevičs, T. Beinerts, M. Sarma, and Y. Gelfgat. Arrays of Rotating Permanent Magnet Dipoles for Stirring and Pumping of Liquid Metals, *Journal for Manufacturing Science and Production* **15**, no. 1 (2015), pp. 35–39. DOI: 10.1515/jmisp-2014-0039.
- [17] A. Caciagli, R. Baars, A. Philipse, and B. W.M. Kuipers. Exact expression for the magnetic field of a finite cylinder with arbitrary uniform magnetization, *Journal of Magnetism and Magnetic Materials* **456** (June 2018), pp. 423–432. DOI: 10.1016/j.jmmm.2018.02.003.
- [18] L. P. Gorbachev, N. V. Nikitin, and A. L. Ustinov. Magnetohydrodynamic rotation of electrically conducting liquid in a cylindrical vessel of finite dimensions, *Magnetohydrodynamics* **10**, no. 4 (1974), pp. 406–414.

- [19] J. Stiller, K. Koal, and R. Grundmann. “Stirring of melts using rotating and travelling magnetic fields”, *Fifth International Conference on CFD in the Process Industries*. CSIRO, Melbourne, Australia, Dec. 2006.
- [20] I. Grants, C. Zhang, S. Eckert, and G. Gerbeth. Experimental observation of swirl accumulation in a magnetically driven flow, *Journal of Fluid Mechanics* **616** (Dec. 2008), pp. 135–152. DOI: 10.1017/S0022112008003650.
- [21] Yu. M. Gelfgat and A. Gelfgat. Experimental and numerical study of rotating magnetic field driven flow in cylindrical enclosures with different aspect ratios, *Magnetohydrodynamics* **40**, no. 2 (2004), pp. 147–160. DOI: 10.22364/mhd.40.2.3.
- [22] M. Rivero, S. Cuevas, and E. Ramos. Magnetohydrodynamic flow induced by arrays of rotating permanent magnets, *Experimental Thermal and Fluid Science* **78** (2016), pp. 30–40. ISSN: 0894-1777. DOI: 10.1016/j.expthermflusci.2016.05.008.
- [23] A. Morev and A. Aliferov. Study of an aluminium mixing system based on permanent magnets, *The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering* **39** (2020), pp. 192–197. ISSN: 0332-1649. DOI: 10.1108/COMPEL-06-2019-0233.
- [24] I. Grants, G. Gerbeth, and A. Bojarevičs. Contactless magnetic excitation of acoustic cavitation in liquid metals, *Journal of Applied Physics* **117** (2015). 204901. DOI: 10.1063/1.4921164.
- [25] I. Kaldre, A. Bojarevičs, I. Grants, T. Beinerts, M. Kalvāns, M. Milgrāvis, and G. Gerbeth. Nanoparticle dispersion in liquid metals by electromagnetically induced acoustic cavitation, *Acta Materialia* **118** (2016), pp. 253–259. DOI: 10.1016/j.actamat.2016.07.045.
- [26] M. Kalvāns, A. Bojarevičs, I. Kaldre, and T. Beinerts. “Assessment of Linear Permanent Magnet Liquid Metal Dispenser”, 2016.
- [27] I. Kaldre, M. Milgravis, A. Bojarevics, and T. Beinerts. Electromagnetic Processing during Directional Solidification of Particle-Strengthened Aluminum Alloys for Additive Manufacturing, *Materials Proceedings* **3**, no. 1 (2021). ISSN: 2673-4605. DOI: 10.3390/IEC2M-09255.
- [28] M. Milgrāvis, G. Kronkalns, R. Nikoluškins, T. Beinerts, M. Kalvāns, A. Bojarevičs, and I. A. Perianu. Electromagnetic Methods for Production of Aluminium Metal Matrix Composites, *Solid State Phenomena* **332** (June 2022), pp. 19–27. DOI: 10.4028/p-9shcqm.

- [29] G. Lopez-Santana, A. Kennaugh, and A. Keshmiri. Experimental Techniques against RANS Method in a Fully Developed Turbulent Pipe Flow: Evolution of Experimental and Computational Methods for the Study of Turbulence, *Fluids* **7**, no. 2 (2022). ISSN: 2311-5521. DOI: 10.3390/fluids7020078.
- [30] S. Vijiapurapu and J. Cui. Performance of turbulence models for flows through rough pipes, *Applied Mathematical Modelling* **34**, no. 6 (2010), pp. 1458–1466. ISSN: 0307-904X. DOI: 10.1016/j.apm.2009.08.029.
- [31] A. Gupta and R. Kumar. Three-dimensional turbulent swirling flow in a cylinder: Experiments and computations, *International Journal of Heat and Fluid Flow* **28**, no. 2 (2007), pp. 249–261. ISSN: 0142-727X. DOI: 10.1016/j.ijheatfluidflow.2006.04.005.
- [32] N. N. Zadeh and R. Paoli. Numerical Experiments of Subsonic Jet Flow Simulations Using RANS with OpenFOAM, *Open Journal of Fluid Dynamics* **12** (2022), pp. 230–247. DOI: 10.4236/ojfd.2022.122011.
- [33] M. Breuer, D. Lakehal, and W. Rodi. “Flow around a Surface Mounted Cubical Obstacle: Comparison of Les and Rans-Results”, *Computation of Three-Dimensional Complex Flows: Proceedings of the IMACS-COST Conference on Computational Fluid Dynamics Lausanne, September 13–15, 1995*. Ed. by M. Deville, S. Gavrilakis, and I. L. Ryhming. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 1996, pp. 22–30. ISBN: 978-3-322-89838-8. DOI: 10.1007/978-3-322-89838-8.4.
- [34] Z. Xie and I. P. Castro. LES and RANS for Turbulent Flow over Arrays of Wall-Mounted Obstacles, *Flow, Turbulence and Combustion* **76**, no. 3 (Apr. 2006), pp. 291–312. ISSN: 1573-1987. DOI: 10.1007/s10494-006-9018-6.
- [35] Y. Velísková, Z. Chára, R. Schügerl, and R. Dulovičová. CFD simulation of flow behind overflowed obstacle, *Journal of Hydrology and Hydromechanics* **66**, no. 4 (2018), pp. 448–456. DOI: 10.2478/johh-2018-0028.
- [36] E. Hopf. A mathematical example displaying features of turbulence, *Communications on Pure and Applied Mathematics* **1**, no. 4 (1948), pp. 303–322. DOI: 10.1002/cpa.3160010401.
- [37] L. Larger, J.-P. Goedgebuer, and T. Erneux. Subcritical Hopf bifurcation in dynamical systems described by a scalar nonlinear delay differential equation, *Phys. Rev. E* **69** (3 Mar. 2004), p. 036210. DOI: 10.1103/PhysRevE.69.036210.



- [38] Y. Pomeau and P. Manneville. Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems, *Communications in Mathematical Physics* **74**, no. 2 (1980), pp. 189–197. DOI: 10.1007/BF01197757.
- [39] A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, M. K. Kurovskaya, and S. Boccaletti. Ring Intermittency in Coupled Chaotic Oscillators at the Boundary of Phase Synchronization, *Phys. Rev. Lett.* **97** (11 Sept. 2006), p. 114101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.97.114101.
- [40] G. Dong, L. Tian, J. Xia, S. Zheng, and R. Du. Sudden occurrence of chaos-II in nonsmooth maps, *International Journal of Bifurcation and Chaos* **20**, no. 12 (2010), pp. 4159–4174. DOI: 10.1142/S0218127410028276.
- [41] A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, M. K. Kurovskaya, and O. I. Moskalenko. Type-I intermittency with noise versus eyelet intermittency, *Physics Letters A* **375**, no. 15 (2011), pp. 1646–1652. ISSN: 0375-9601. DOI: 10.1016/j.physleta.2011.02.032.
- [42] N. Platt, E. A. Spiegel, and C. Tresser. On-off intermittency: A mechanism for bursting, *Phys. Rev. Lett.* **70** (3 Jan. 1993), pp. 279–282. DOI: 10.1103/PhysRevLett.70.279.
- [43] Y.-C. Lai and C. Grebogi. Intermingled basins and two-state on-off intermittency, *Phys. Rev. E* **52** (4 Oct. 1995), R3313–R3316. DOI: 10.1103/PhysRevE.52.R3313.
- [44] J. F. Heagy, N. Platt, and S. M. Hammel. Characterization of on-off intermittency, *Phys. Rev. E* **49** (2 Feb. 1994), pp. 1140–1150. DOI: 10.1103/PhysRevE.49.1140.
- [45] A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, I. S. Midzyanovskaya, E. Sitnikova, and C. M. van Rijn. On-off intermittency in time series of spontaneous paroxysmal activity in rats with genetic absence epilepsy, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* **16**, no. 4 (2006), p. 043111. DOI: 10.1063/1.2360505.
- [46] Z. Qian, C. Zeng-Qiang, and Y. Zhu-Zhi. Generation of on-off intermittency based on Rössler chaotic system, *Chinese Physics* **16**, no. 9 (Sept. 2007), pp. 2616–2626. DOI: 10.1088/1009-1963/16/9/020.
- [47] M. Grandemange, M. Gohlke, and O. Cadot. Bi-stability in the turbulent wake past parallelepiped bodies with various aspect ratios and wall effects, *Physics of Fluids* **25**, no. 9 (2013), p. 095103. DOI: 10.1063/1.4820372.

- [48] Y. Fan, C. Xia, S. Chu, Z. Yang, and O. Cadot. Experimental and numerical analysis of the bi-stable turbulent wake of a rectangular flat-backed bluff body, *Physics of Fluids* **32**, no. 10 (2020), p. 105111. DOI: 10.1063/5.0019794.
- [49] K. He, G. Minelli, X. Su, G. Gao, and S. Krajnović. On state instability of the bi-stable flow past a notchback bluff body, *Journal of Fluid Mechanics* **931** (2022), R6. DOI: 10.1017/jfm.2021.1025.
- [50] N. Deng, B. R. Noack, M. Morzyński, and L. R. Pastur. Low-order model for successive bifurcations of the fluidic pinball, *Journal of Fluid Mechanics* **884** (2020), A37. DOI: 10.1017/jfm.2019.959.
- [51] P. P. Galuzio, S. R. Lopes, and R. L. Viana. Two-State On-Off Intermittency and the Onset of Turbulence in a Spatiotemporally Chaotic System, *Phys. Rev. Lett.* **105** (5 July 2010), p. 055001. DOI: 10.1103/PhysRevLett.105.055001.
- [52] F. Garcia, M. Seilmayer, A. Giesecke, and F. Stefani. Intermittent chaotic flows in the weakly magnetised spherical Couette system, *PAMM* **21**, no. 1 (2021), e202100024. DOI: 10.1002/pamm.202100024.
- [53] I. A. Belyaev, D. A. Biryukov, D. N. Gerasimov, and E. I. Yurin. On-off intermittency and hard turbulence in the flow of fluid in the magnetic field, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* **29**, no. 8 (2019), p. 083119. DOI: 10.1063/1.5098538.
- [54] J. L. Cabrera and J. G. Milton. On-Off Intermittency in a Human Balancing Task, *Phys. Rev. Lett.* **89** (15 Sept. 2002), p. 158702. DOI: 10.1103/PhysRevLett.89.158702.
- [55] S. C. Cande and D. V. Kent. Revised calibration of the geomagnetic polarity timescale for the Late Cretaceous and Cenozoic, *Journal of Geophysical Research: Solid Earth* **100**, no. B4 (1995), pp. 6093–6095. DOI: 10.1029/94JB03098.
- [56] P. Ashwin, A. M. Rucklidge, and R. Sturman. Two-state intermittency near a symmetric interaction of saddle-node and Hopf bifurcations: a case study from dynamo theory, *Physica D: Nonlinear Phenomena* **194**, no. 1 (2004), pp. 30–48. ISSN: 0167-2789. DOI: 10.1016/j.physd.2004.02.002.
- [57] A. Yu. Kurazhkovskii, N. A. Kurazhkovskaya, and B. I. Klain. Stochastic behavior of geomagnetic field in the Middle Jurassic-Paleogene, *Geomagnetism and Aeronomy* **55** (2 2015), pp. 223–234. ISSN: 1555-645X. DOI: 10.1134/S0016793215010089.

- [58] M. Landeau, A. Fournier, H.-C. Nataf, D. Cébron, and N. Schaeffer. Sustaining Earth’s magnetic dynamo, *Nature Reviews Earth & Environment* **3**, no. 4 (Apr. 2022), pp. 255–269. ISSN: 2662-138X. DOI: 10.1038/s43017-022-00264-1.
- [59] F. Lepreti, V. Carbone, P. Giuliani, L. Sorriso-Valvo, and P. Veltri. Statistical properties of dissipation bursts within turbulence: Solar flares and geomagnetic activity, *Planetary and Space Science* **52**, no. 10 (2004). Nonlinear Processes in Solar System Plasmas, pp. 957–962. ISSN: 0032-0633. DOI: 10.1016/j.pss.2004.03.001.
- [60] N. Platt, E. A. Spiegel, and C. Tressler. The intermittent solar cycle, *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics* **73**, no. 1-4 (1993), pp. 147–161. DOI: 10.1080/03091929308203626.
- [61] F. Stefani, J. Beer, A. Giesecke, T. Gloaguen, M. Seilmayer, R. Stepanov, and T. Weier. Phase coherence and phase jumps in the Schwabe cycle, *Astronomische Nachrichten* **341**, no. 6-7 (2020), pp. 600–615. DOI: 10.1002/asna.202013809.
- [62] H.-C. Nataf. Tidally Synchronized Solar Dynamo: A Rebuttal, *Solar Physics* **297**, no. 8 (Aug. 2022), p. 107. ISSN: 1573-093X. DOI: 10.1007/s11207-022-02038-w.
- [63] J. Vencels, P. Råback, and V. Geža. EOF-Library: Open-source Elmer FEM and OpenFOAM coupler for electromagnetics and fluid dynamics, *SoftwareX* **9** (2019), pp. 68–72. ISSN: 2352-7110. DOI: 10.1016/j.softx.2019.01.007.
- [64] D. J. Griffiths. *Introduction to electrodynamics. 3rd Edition*. London: Prentice-Hall, 1999. Chap. 7.1 and 10.1.
- [65] A. Bojarevičs and T. Beinerts. Experiments on liquid metal flow induced by a rotating magnetic dipole, *Magnetohydrodynamics* **46**, no. 4 (2010), pp. 333–338. DOI: 10.22364/mhd.46.4.2.
- [66] P. Spalart and S. Allmaras. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows, *Recherche Aerospatiale* no. 1 (1994), pp. 5–21.
- [67] I. Grants and D. Berenis. Stability of electrically conducting liquid flow driven by a rotating magnetic dipole in a ring channel, *Physics of Fluids* **32**, no. 4 (2020), p. 044104. DOI: 10.1063/5.0002094.
- [68] W.M. Haynes. *CRC Handbook of Chemistry and Physics*. CRC Press, 2016. ISBN: 9781498754293.
- [69] G. Gritzner and R. F. Phillips. Densities, viscosities, and vapor pressures of copper(II) chloride solutions in hydrochloric acid, *Journal of Chemical & Engineering Data* **17**, no. 4 (1972), pp. 425–428. DOI: 10.1021/jc60055a006.

- [70] C. Steger. An unbiased detector of curvilinear structures, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* **20**, no. 2 (1998), pp. 113–125. DOI: 10.1109/34.659930.
- [71] T. Wagner, M. Hiner, and X. Raynaud. thorstenwagner/ij-ridgedetection: Ridge Detection 1.4.0. Version v1.4.0, (Aug. 2017). DOI: 10.5281/zenodo.845874.

