Kompleksie skaitļi

Specializētā kursa programmas paraugs vispārējai vidējai izglītībai

Valsts izglītības satura centrs | ESF projekts Nr. 8.3.1.1/16/I/002
Kompetenču pieeja mācību saturā

SKOLA 2030

Kompleksie skaitļi

Specializētā kursa programmas paraugs vispārējai vidējai izglītībai

Programmas paraugs ir izstrādāts Eiropas Sociālā fonda projektā
“Kompetenču pieeja mācību saturā” (turpmāk – Projekts).
Mācību satura izstrādi pirmsskolas, pamatizglītības un vispārējās vidējās izglītības pakāpē
Projektā vadīja **Dace Namsone** un **Zane Oliņa**.

Programmas paraugu izstrādāja **Maija Balode**.

Programmas paraugu izvērtēja ārējie eksperti: mācību satura recenzente **Baiba Āboltiņa** un zinātniskā recenzente **Dace Kūma**.

ISBN **978-9934-24-099-7**

Saturs

Ievads

Specializētā kursa “**Kompleksie skaitļi**” programmas (turpmāk – programma) paraugs ir veidots, lai palīdzētu skolotājiem īstenot Ministru kabineta 2019. gada 3. septembra noteikumos Nr. 416 “Noteikumi par valsts vispārējās vidējās izglītības standartu un vispārējās vidējās izglītības programmu paraugiem” (turpmāk – standarts) noteiktos plānotos skolēnam sasniedzamos rezultātus matemātikas mācību jomā augstākajā mācību satura apguves līmenī.

Programmā iekļauti:

- kursa mērķis un uzdevumi;
- mācību saturs;
- mācību sasniegumu vērtēšanas formas un metodiskie paņēmieni;
- ieteikumi mācību darba organizācijai;
- mācību satura apguves norise.

Programma veidota, paredzot, ka kursa apguvei vidējās izglītības pakāpē tiks atvēlētas 35 mācību stundas.

Programmas paraugam ir ieteikuma raksturs. Skolotāji var izmantot šo programmu vai arī izstrādāt savu programmu, lai

- skolēni izmēģinātu jaunas, neierastas jomas;
- skolēni papildinātu savu individuālo mācību plānu ar kursiem vispusīgai izglītībai;
- skola veidotu unikālu izglītības programmas piedāvājumu skolēnu piesaistei;
- attīstītu specializētus virzienus/kursu komplektus skolēnu izvēlei.

Mērķis un uzdevumi

Specializētā kursa apguves mērķis un uzdevumi skolēnam ir:

1) veidot izpratni par dažādajām skaitļu kopām, to paplašinājumiem un darbībām, kas tajās izpildāmas;
2) lietot kompleksos skaitļus polinoma sakņu noteikšanā;
3) izpildot darbības ar kompleksajiem skaitļiem, saskatīt atšķirīgo pieraksta formu priekšrocības.

Mācību saturs

Specializētā kursa mācību satura apguvē skolēns paplašinās un padziļinās “Matemātika II” padziļinātajā kursā apgūtās zināšanas atbilstoši šādiem standartā noteiktiem sasniedzamajiem rezultātiem.

M.A.3.1.2. Skaidro kompleksa skaitļa pierakstu algebriskā formā, eksponenciālā formā, trigonometriskā formā un pāriet no vienas formas uz citu.

M.A.3.1.3. Attēlo skaitli komplekso skaitļu plaknē, aprēķina kompleksa skaitļa moduli.

M.A.3.2.2. Izpilda darbības (saskaita, atņem, reizina, dala, aprēķina kvadrātsaknes vērtību) ar kompleksiem skaitļiem, izvēloties piemērotāko pieraksta formu.

M.A.4.5.11. Atrisina vienādojumu komplekso skaitļu kopā, lietojot dažādas vienādojumu risināšanas metodes.

Mācību sasniegumu vērtēšanas formas un metodiskie paņēmieni

Programmā paredzēti četru veidu plānotie skolēnam sasniedzamie rezultāti: zināšanas un izpratne, prasmes, vērtībās balstīti ieradumi un zināšanu, izpratnes, prasmju un ieradumu kombinācijas.

Zināšanu un izpratnes apguve attiecas uz standartā plānotajiem skolēnam sasniedzamajiem rezultātiem, kuri parasti sākas ar darbības vārdiem "skaidro", "pamato" u. c. Plānoto skolēnam sasniedzamo rezultātu apguvi skolēns parāda, piemēram, skaidrojot jēdzienus, algoritmus, piedaloties sarunās un diskusijās.

Prasmju grupas atspoguļo būtiskas mācību priekšmeta specifiskās prasmes, domāšanas prasmes. Prasmju apguvi skolēns demonstrē darbībā, piemēram, modelē, aprēķina, analītiski spriež, lieto priekšmeta specifisko valodu.

Ieradumus, kas balstīti vērtībās, skolēns demonstrē darbībā; tos vērtē, novērojot skolēna darbību ilgākā laikposmā, īpaši situācijās, kuras ietver izvēles iespējas.

Zināšanu, izpratnes, prasmju un ieradumu kombinācijas, kuras ir raksturīgas šī kursa mācību satura apguvē, skolēns demonstrē darbībā, risinot problēmas, izvērtējot to risinājumus, dažādus paņēmienus.

Skolotājs atbilstoši sasniedzamajam rezultātam izvēlas uzdevumu un vērtēšanas formu (mutiski, rakstiski, kombinēti). Būtiska uzdevumu daļa ir vērtēšanas kritēriji, saskaņā ar kuriem iespējams izvērtēt snieguma kvalitāti. Ja skolēns var demonstrēt sniegumu dažādās kvalitātes gradācijās, tad ir svarīgi veidot snieguma aprakstu attiecībā pret būtiskiem kritērijiem. Kritēriju izstrādē un vērtēšanā var iesaistīt skolēnus, lai pilnveidotu viņu pašvadītas mācīšanās prasmes.

Ieteikumi mācību darba organizācijai

Sadaļā izvērsts mācību saturs, sākumā, pēc tematu plānojuma, ir norādīti resursi, kuros meklēt papildu uzdevumus. Papildus uzdevumus var izmantot no resursiem ar numuriem 2 un 5. Dažiem jautājumiem dots plašāks izklāsts, dažiem – īsāks. Ir piemēri, kas parāda gan spriešanas veidu, gan pierakstu. Saknes atrašanai tiek izmantots trigonometriskās formas īsāks pieraksts, lai nav tik gari un daudz jāraksta. Apzīmējums ir aizgūts no matemātikas mācību grāmatām, kas ir izdotas Austrālijā, bet šobrīd šis pieraksts ir plaši izplatījies un sastopams daudzās mācību grāmatās, kas izdotas angļu valodā ($\cos\varphi + i\sin\varphi = cis\varphi$ – pierakstā izmantojot pirmos burtus un i, jo leņķis abām funkcijām ir viens). Jāpievērš uzmanība, ka, pārveidojot kompleksos skaitļus no algebriskās formas uz trigonometrisko, tiek lietots arguments intervālā $[0; 2\pi)$, jo tas atvieglo saknes atrašanu un ir plašāk lietots trigonometrijā. Skolotājs, izvērtējot skolēnu vajadzības, šos materiālus var izmantot pēc nepieciešamības – skolēniem zināmo izlaist vai uzdot mājās patstāvīgai izpētei. Sākotnējo izpratni par jauniem, konceptuāli nozīmīgiem jēdzieniem, paņēmieniem, piemēram, pāreja no kompleksā skaitļa algebriskās formas uz trigonometrisko, skolēni gūst darbībā, saistot jauno ar jau zināmo, patstāvīgi veicot izpēti, formulējot idejas un pieņēmumus. Ievērojot tematā sasniedzamos rezultātus, ieteicams šāds tematu plānojums un stundu skaita sadalījums pa tēmām. Piedāvātajam sadalījumam ir ieteikuma raksturs, skolotājs plāno stundu skaitu tēmai, ievērojot savu pieredzi un skolēnu mācīšanās vajadzības. Stundu sadalījums katra temata ietvaros dots, balstoties uz mācību satura apguves norisi. Pielikumā ir uzdevumi, kas ir palīdzējuši skolēniem novērtēt savas prasmes, pildot uzdevumus par kompleksajiem skaitļiem.

Tēma	Stundu skaits	Stundu skaits kopā
Kompleksie skaitļi algebriskā formā $(a+bi)$. Reālie skaitļi, imaginārie skaitļi. Komplekso skaitļu vienādība. Saistītie kompleksie skaitļi, kompleksā skaitļa pretējais, to īpašības.	1	7
Kompleksā skaitļa attēlojums koordinātu plaknē, tā modulis. Komplekso skaitļu ģeometriskā interpretācija – atbilstošais rādiusvektors.	1	
Komplekso skaitļu algebriskā formā saskaitīšana, atņemšana un reizināšana.	1	
Komplekso skaitļu saskaitīšana, atņemšana ar atbilstošajiem rādiusvektoriem ar paralelograma likumu.	1	
Imagināro skaitļu pakāpes. Komplekso skaitļu naturāla skaitļa pakāpes. Ņūtona binoma izvirzījuma lietojums, nosakot komplekso skaitļu augstākas pakāpes.	1	
Komplekso skaitļu dalīšana algebriskā formā. Kompleksā skaitļa apgrieztais skaitlis.	1	
Kvadrātsaknes no kompleksā skaitļa noteikšana, izmantojot algebrisko formu.	1	
Kvadrātvienādojuma ar reāliem koeficientiem atrisinājums (diskriminants ir negatīvs) komplekso skaitļu kopā, to īpašības – saknes ir saistīti kompleksie skaitļi. Kvadrāttrinoma sadalīšana reizinātājos.	2	6
Polinomu dalīšana, pazeminot vienādojuma pakāpi.	2	
Polinoma visu sakņu noteikšana vai polinoma uzrakstīšana, ja dotas tā saknes – kompleksā un reālās.	2	
Kompleksā skaitļa attēlojums koordinātu plaknē, tā arguments un argumenta galvenā vērtība.	2	12
Kompleksie skaitļi trigonometriskajā formā: $r(cos\alpha + sin\alpha)$. Vienādība $r(cos\alpha + sin\alpha) = a + bi$. Komplekso skaitļu pārveidošana no algebriskās formas uz trigonometrisko un no trigonometriskās uz algebrisko.	2	
Komplekso skaitļu reizināšana trigonometriskajā formā – formulas izvedums un darbību izpilde.	2	
Komplekso skaitļu dalīšana trigonometriskajā formā – formulas izvedums un darbību izpilde.	2	
Kompleksā skaitļa trigonometriskajā formā pakāpe – Muavra teorēma, tās pierādījums, izmantojot Matemātiskās indukcijas principu (MIP).	2	
Kompleksā skaitļa trigonometriskajā formā n-tās pakāpes sakņu noteikšana un attēlošana koordinātu plaknē.	2	
Eilera formula: $e^{i\alpha} = cos\alpha + i\ sin\alpha$. Kompleksie skaitļi eksponenciālajā formā: $r(cos\alpha + i\ sin\alpha) = re^{i\alpha}$. Vienādības $e^{i\pi} + 1 = 0$ pamatošana.	1	6
Komplekso skaitļu pārveidošana no vienas formas citā – algebriskā, trigonometriskā, eksponenciālā.	1	
Komplekso skaitļu eksponentformā reizināšana, dalīšana un pakāpe. (Piemēram, i^i.)	2	
n-tās pakāpes saknes noteikšana no kompleksā skaitļa eksponentformā.	2	
Uzdevumi, kur lieto kompleksos skaitļus. Pārskata uzdevumi.	3	3
Pārbaudes darbs.	1	1

Resursi

1. Āboltiņa, B. Liepiņa, K. *Rokasgrāmata matemātikā (vecāko klašu skolēniem un studentiem).* Rīga: Zvaigzne ABC, 2017.
2. Caunīte, R. Liepiņa, K. Ziobrovskis, V. *Algebras vingrinājumu komplekts vidusskolai. 2. daļa*. Rīga: Zvaigzne ABC, 2003.
3. Kriķis, D. Šteiners, K. *Algebra 10.–12. klasei. I daļa.* Rīga: Zvaigzne ABC, 1998.
4. Kriķis, D. Šteiners, K. *Algebra 10.–12. klasei. VI daļa.* Rīga: Zvaigzne ABC, 2001.
5. Kriķis, D. Zariņš, P. Ziobrovskis, V. *Diferencēti uzdevumi matemātikā. 1. daļa*. Rīga: Zvaigzne ABC, 1994.
6. Kompleksie skaitļi, iegūts no: https://www.uzdevumi.lv/p/matematika/1-kurss/kompleksie-skaitli-10422.
7. Fannon, P. Kadelburg, V. Woolley, B. Ward, S. *Mathematics Higher Level for the IB Diploma.* Cambridge University Press & Assessment, 2012.
8. Harcet, J. Heinrichs, L. Seiler, P.M. Skoumal, M.T. *IB Mathematics Higher Level Course Book: Oxford IB Diploma Program*. Oxford University Press, 2012.
9. Smythe, P. *Mathematics HL & SL With HL Options*. Mathematics Publishing Pty. Limited, 2003.
10. Wazir, I. Garry, T. *Mathematics Analysis and Approaches for the IB Diploma Higher Level*. Pearson Education, 2019.
11. Complex numbers, iegūts no: https://www.geogebra.org/t/complex-numbers.
12. Complex numbers, numbers, iegūts no: https://www.geogebra.org/m/MSnh4aqM.
13. Complex numbers, numbers, iegūts no: https://www.geogebra.org/m/Xh5mbEXx.
14. Graphing complex numbers, iegūts no: https://www.geogebra.org/m/NpSQ8us5.
15. Graphing complex numbers, iegūts no: https://www.geogebra.org/m/ZGnjRcNx.
16. Joukowski aerofoils and flow mapping, iegūts no: http://www.aerodynamics4students.com/subsonic-aerofoil-and-wing-theory/joukowski-aerofoils-and-flow-mapping.php.

Mācību satura apguves norise

Komplekso skaitļu kopa

Skaitļu kopas paplašināšanas ideja nav jauna. Mūsu priekšstats par skaitli mainās, paplašinoties to uzdevumu lokam, kurus nepieciešams risināt. Ja priekšmetu saskaitīšanai pietiek ar naturālo skaitļu kopu ($\mathbb{N}$), bet, nosakot naturālu skaitļu starpību, nepieciešama veselo skaitļu kopa ($\mathbb{Z}$), tad, piemēram, vienādojuma $px + q = 0$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}$ atrisināšanai veselo skaitļu nepietiek – vajadzīgi racionālie skaitļi ($\mathbb{Q}$). Savukārt ar racionālajiem skaitļiem ne vienmēr var izteikt nogriežņa garumu. Lai katram nogrieznim varētu piekārtot garumu, racionālo skaitļu kopa jāpaplašina ar iracionālajiem skaitļiem, t.i., ar jēdzienu "skaitlis" jāsaprot reāls skaitlis ($\mathbb{R}$). Ja mūsu rīcībā būtu tikai racionālie skaitļi, tad nebūtu iespējams arī atrisināt, piemēram, vienādojumu $x^2 - 2 = 0$, jo racionālo skaitļu kopā šim vienādojumam atrisinājuma nav. Taču izrādās, ka arī reālo skaitļu kopa ir nepietiekama, lai varētu atrisināt visus algebriskos vienādojumus. Reālo skaitļu kopā nav atrisinājumu tādiem kvadrātvienādojumiem, kuru diskriminants ir negatīvs skaitlis, un to koeficienti var būt naturāli skaitļi, piemēram, $x^2 + 1 = 0$ vai $x^2 + x + 1 = 0$. Šo vienādojumu atrisinājumi ir kompleksie skaitļi ($\mathbb{C}$). Būtu visai neērti, ja katru reizi, pārejot uz sarežģītāku vienādojumu risināšanu, vajadzētu lietot jaunus, arvien sarežģītākus skaitļus. Izrādās, ka algebrisko vienādojumu teorijas vajadzībām pilnīgi pietiek ar komplekso skaitļu kopu, kurā ir atrisināmi ne tikai visi kvadrātvienādojumi, tā satur arī jebkuras pakāpes algebriska vienādojuma atrisinājumus, neatkarīgi no tā, vai vienādojuma koeficienti ir reāli vai kompleksi skaitļi.

Pārejot no naturāliem skaitļiem uz veseliem skaitļiem, no veseliem uz racionāliem un no racionāliem uz reāliem skaitļiem, katru reizi izpildās šāds nosacījums: jaunā paplašinātā skaitļu kopa satur sevī sākotnējo kopu. Veselo skaitļu kopa satur arī naturālos skaitļus, bet racionālo skaitļu kopā ietilpst veselie skaitļi. Reālo skaitļu kopa satur arī visus racionālos skaitļus. Definējot kompleksos skaitļus, šim nosacījumam jāpaliek spēkā – komplekso skaitļu kopai jāsatur visi reālie skaitļi ($\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$).

Kompleksie skaitļi tiek plaši pielietoti dažādās jomās. Ģeometrijā lieto, lai risinātu dažādas problēmas, kas saistītas ar pagriezienu. Elektromagnētisko viļņu izplatīšanās ir viena joma, kurā tiek izmantoti kompleksie skaitļi. Elektrisko ķēžu analīzē un signālu apstrādē kompleksie skaitļi palīdz modelēt signālus un aprēķināt fāzes nobīdes un amplitūdu. Kompleksie skaitļi tiek izmantoti digitālo signālu apstrādes algoritmos, piemēram, lai veiktu Furjē transformācijas un spektrālo analīzi.

Robotikā kompleksos skaitļus var izmantot, lai modelētu un aprakstītu dažādus kustību un sensoru signālus. Medicīnā – elektrokardiogrāfijā (EKG), kompleksie skaitļi var palīdzēt analizēt sirdsdarbības ciklus un citus medicīniskos datus. Kompleksie skaitļi var tikt izmantoti, lai veidotu interesantas formas, attēlus un modeļus grafiskajā dizainā un mākslā.

Par **imagināro vienību** sauc tādu skaitli, kura kvadrāts ir vienāds ar -1, t.i., $i^2 = -1$.

Komplekso skaitļu kopa $\mathbb{C}$ ir tāda kopa, kuras elementi ir kompleksie skaitļi.

Par **komplekso skaitli** sauc skaitli, kuru var uzrakstīt formā $a + bi$, kur $a, b \in \mathbb{R}$, bet i ir imagināra vienība. Skaitli a sauc par kompleksā skaitļa reālo daļu un apzīmē $\mathrm{Re}(a + bi) = a$, bi – par imagināro daļu, bet b – par imaginārās daļas koeficientu un apzīmē $\mathrm{Im}(a + bi) = b$. Kompleksos skaitļus mēdz pierakstīt arī ar citiem burtiem, piemēram, $x + iy$ vai $c + di$ utt.

Komplekso skaitli parasti apzīmē ar burtu z un raksta $z = a + bi$ jeb $z = \mathrm{Re}\, z + i\, \mathrm{Im}\, z$. Ja $a = 0$, tad kompleksais skaitlis z ir vienāds ar imagināro skaitli bi; ja $b = 0$, tad z ir reāls skaitlis a. Katru reālo skaitli var uzrakstīt kā komplekso skaitli.

Divus kompleksos skaitļus $z_1 = a_1 + b_1 i$ un $z_2 = a_2 + b_2 i$ sauc par **vienādiem** un raksta $z_1 = z_2$, ja ir vienādas to reālās daļas un imagināro daļu koeficienti, t.i., ja $a_1 = a_2$ un $b_1 = b_2$.

Kompleksais skaitlis $z = a + bi$ ir vienāds ar nulli tad un tikai tad, ja $a = 0$ un $b = 0$.

Kompleksajiem skaitļiem attieksmi "nevienādība" nedefinē.

Komplekso skaitļu kopā nepastāv attiecības "lielāks" un "mazāks". Nelieto arī jēdzienus – kompleksais skaitlis ir pozitīvs vai negatīvs. Tātad komplekso skaitļu kopa nav sakārtota kopa. Ja tiek minēts, ka kompleksais skaitlis ir pozitīvs vai negatīvs, tas nozīmē, ka kompleksā skaitļa imaginārās daļas koeficients ir 0 un tas būs reāls skaitlis.

Piemērs

Ar kādām reālām x un y vērtībām kompleksie skaitļi $z_1 = y^2 - \frac{x}{i} - 2x + 4i$ un $z_2 = 3 - \frac{y^2}{i} - 3xi$ ir vienādi?

Risinājums

Vispirms katru no skaitļiem pārraksta, lai var noteikt katra kompleksā skaitļa reālo daļu un imaginārās daļas koeficientu.

$$z_1 = y^2 - \frac{x^{(i}}{i} - 2x + 4i = y^2 - \frac{xi}{i^2} - 2x + 4i = y^2 + xi - 2x + 4i = y^2 - 2x + i(x + 4)$$

$$z_2 = 3 - \frac{y^{2(i}}{i} - 3xi = 3 - \frac{y^2 i}{i^2} - 3xi = 3 + y^2 i - 3xi = 3 + i(y^2 - 3x)$$

Kompleksie skaitļi būs vienādi, ja to reālās daļas un imagināro daļu koeficienti būs vienādi. Uzraksta sistēmu un to atrisina.

$$\begin{cases} y^2 - 2x = 3 \\ x + 4 = y^2 - 3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = 3 + 2x \\ y^2 = 4x + 4 \end{cases} \Rightarrow 3 + 2x = 4x + 4 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ un}$$

$$y^2 = 3 + 2x \Rightarrow y^2 = 3 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2}$$

Meklētie atrisinājumi ir $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \sqrt{2} \end{cases}$ un $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -\sqrt{2} \end{cases}$.

Savstarpēji saistīti un savstarpēji pretēji kompleksie skaitļi

Kompleksos skaitļus $z = a + bi$ un $\bar{z} = a - bi$ sauc par **savstarpēji saistītiem skaitļiem**. To reālās daļas ir vienādas, bet imagināro daļu koeficienti ir pretēji skaitļi. Savstarpēji saistītiem kompleksajiem skaitļiem ir vienādi moduļi. Diviem savstarpēji saistītiem kompleksajiem skaitļiem atbilstošie koordinātu plaknes punkti ir simetriski attiecībā pret $0x$ asi, jo šo punktu abscisas ir vienādas, bet ordinātas ir skaitļi, kuru moduļi ir vienādi, bet zīmes ir pretējas.

Kompleksos skaitļus $z = a + bi$ un $-z = -a - bi$ sauc par **savstarpēji pretējiem kompleksajiem skaitļiem**. Savstarpēji pretējiem skaitļiem ir vienādi moduļi. Koordinātu plaknes punkti, kas attēlo savstarpēji pretēju komplekso skaitļu pāri, ir simetriski attiecībā pret koordinātu sistēmas sākumpunktu.

Piemērs

Nosaki komplekso skaitli z, lai $3z + 2\bar{z} = 5 + 2i$.

Risinājums

Nezināmo komplekso skaitli z var aizstāj ar $z = a + bi$ un tā saistīto ar $\bar{z} = a - bi$.

Pārraksta vienādojumu $3z + 2\bar{z} = 5 + 2i \Rightarrow 3(a + bi) + 2(a - bi) = 5 + 2i$. To vienkāršojot, iegūst $5a + bi = 5 + 2i$. Ievērojot, ka divi kompleksie skaitļi ir vienādi, ja to reālās daļas un imagināro daļu koeficienti ir vienādi, iegūst sistēmu:

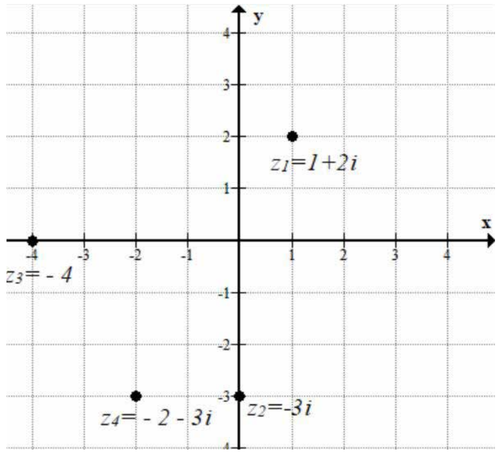
$\begin{cases} 5a = 5 \\ b = 2 \end{cases}$ un $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$ jeb $z = 1 + 2i$.

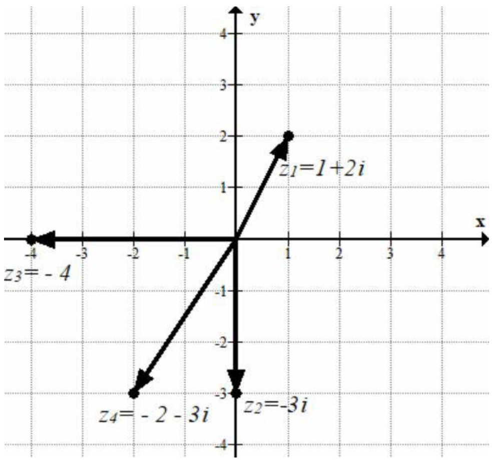
Komplekso skaitļu ģeometriskā interpretācija

Reālu skaitli attēlo ar punktu uz koordinātu taisnes.

Kompleksos skaitļus ģeometriski var attēlot ar plaknes punktiem, piekārtojot skaitlim $a + bi$ Dekarta taisnleņķa koordinātu sistēmā punktu $(a; b)$. Tādējādi abscisu ass kļūst par reālo asi, bet ordinātu ass (izņemot koordinātu sākumpunktu) – par tīri imagināro asi, un visa pārējā plakne kļūst par komplekso skaitļu plakni.

Šajā piekārtojumā katram kompleksajam skaitlim atbilst viens vienīgs plaknes punkts, un katrs plaknes punkts ir atbilstošais vienam vienīgam kompleksajam skaitlim. Tāpēc līdzīgi tam, ka reālo skaitļu kopu attēlo ar taisni, komplekso skaitļu kopu attēlo ar plakni.



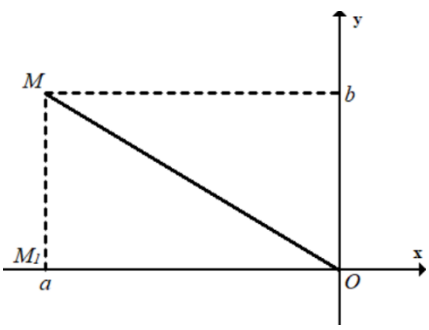


Kompleksos skaitļus $z = a + bi$ var attēlot ne tikai ar plaknes punktiem, bet arī ar to rādiusvektoriem – orientētiem nogriežņiem, kuru sākumpunkts ir punkts $(0; 0)$, bet vektora galapunkts ir punkts ar koordinātām $(a; b)$.

Kompleksā skaitļa modulis

Kompleksā skaitļa modulis ir attālums no koordinātu sākumpunkta līdz punktam, kas atbilst dotajam kompleksajam skaitlim. Ja kompleksais skaitlis ir attēlots ar tam atbilstošo rādiusvektoru, tad tā garums būs šī kompleksā skaitļa modulis. Ja $z = a + bi$ un tam atbilstošais rādiusvektors ir $\overrightarrow{OM} = (a; b)$, tad $|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Par to var pārliecināties arī no kompleksā skaitļa attēla koordinātu plaknē.

Punkts M atbilst kompleksajam skaitlim $a + bi$, $|a + bi|$ ir punkta M attālums līdz koordinātu sistēmas sākumpunktam O jeb hipotenūzas garums taisnleņķa trijstūrī OMM_1. Taisnleņķa trijstūra katešu garumi ir $|a|$ un $|b|$, pēc Pitagora teorēmas $|OM| = \sqrt{|a|^2 + |b|^2} + \sqrt{a^2 + b^2}$.



Kompleksā skaitļa modulis $|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$, kur $a = \mathrm{Re}(z)$ un $b = \mathrm{Im}(z)$. Kompleksā skaitļa moduli apzīmē ar reālu skaitli r, $|z| = r$, kas ir nenegatīvs skaitlis. Tādējādi visi tie kompleksie skaitļi, kuriem ir vienādi moduļi, atrodas uz riņķa līnijas, kuras centrs ir koordinātu sistēmas sākumpunktā O, bet rādiuss ir vienāds ar kompleksā skaitļa moduli.

1. piemērs

Aprēķini dotā kompleksā skaitļa z moduli $|z|$:

a) $z = 3 - 4i$;
b) $z = -1 + 3i$;
c) $z = -5$;
d) $z = -3i$!

Risinājums

a) $\mathrm{Re}(3-4i) = 3,\ \mathrm{Im}(3-4i) = -4,$ tādēļ $|z| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5.$

b) $\mathrm{Re}(-1+3i) = -1,\ \mathrm{Im}(-1+3i) = 3,$ tādēļ $|z| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}.$

c) $\mathrm{Re}(-5) = -5,\ \mathrm{Im}(-5) = 0,$ tādēļ $|z| = \sqrt{(-5)^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5.$

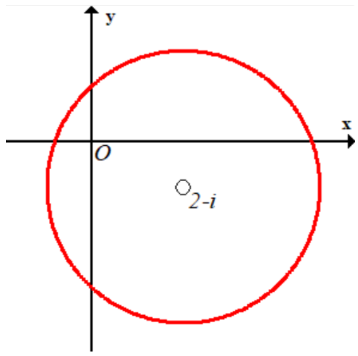
d) $\mathrm{Re}(-3i) = 0,\ \mathrm{Im}(-3i) = -3,$ tādēļ $|z| = \sqrt{0^2 + (-3)^2} = \sqrt{9} = 3.$

2. piemērs

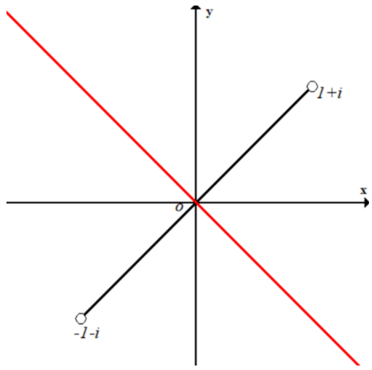
Kādu kompleksās plaknes punktu kopu nosaka nosacījumi:

a) $|z - 2 + i| = 3$;
b) $|z - 1 - i| = |z + 1 + i|$;
c) $|z + i| = 1$;
d) $1 \leqslant |z + 2| \leqslant 2$?

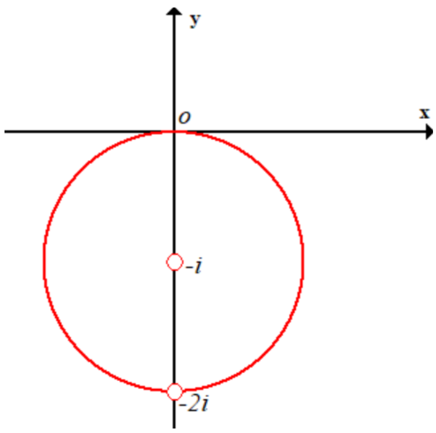
Risinājums



a) Doto nosacījumu pārraksta $|z - (2 - i)| = 3$, to apmierina visi tie punkti, kas atrodas 3 vienību attālumā no punkta $z_1 = 2 - i$. Šo punktu kopa ir riņķa līnija ar centru punktā $z_1 = 2 - i$ un rādiusu $r = 3$.

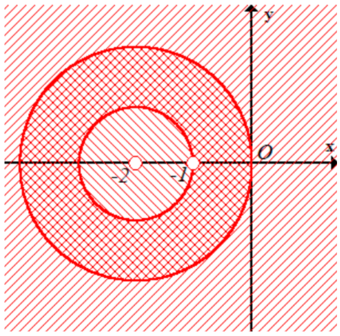


b) Doto nosacījumu pārraksta $|z - (1 + i)| = |z - (-1 - i)|$, to apmierina tie un tikai tie punkti, kas atrodas vienādā attālumā no punktiem $z_1 = 1 + i$ un $z_2 = -1 - i$. Tādu punktu kopa, kas atrodas vienādā attālumā no diviem dotajiem plaknes punktiem, ir šos punktus savienojošā nogriežņa vidusperpendikula punktu kopa. Meklētā punktu kopa ir taisne, kuras vienādojums ir $y = -x$.



c) Nosacījumu $|z + i| = 1 \implies |z - (-i)| = 1$ apmierina tie un tikai tie kompleksās plaknes punkti, kas atrodas vienas vienības attālumā no punkta $z = -i$. Tādi punkti atrodas uz riņķa līnijas, kuras rādiuss ir viena vienība un kuras centrs atrodas punktā $z = -i$.

d) Nosacījumu $1 \leqslant |z + 2| \leqslant 2 \implies 1 \leqslant |z - (-2)| \leqslant 2$ apmierina tie un tikai tie punkti, kas atrodas gredzena iekšpusē vai uz tā robežas. Gredzenu veido divas koncentriskas riņķa līnijas, kuru centrs atrodas punktā $z = -2$, bet rādiusi ir 1 un 2. Meklējamā punktu kopa parādīta zīmējumā ar iesvītrojumu.



Darbības ar kompleksajiem skaitļiem algebriskā formā

Kompleksajiem skaitļiem definē tādas pašas aritmētiskās darbības kā reālo skaitļu kopā: saskaitīšanu, atņemšanu, reizināšanu, dalīšanu, kāpināšanu, saknes atrašanu. Komplekso skaitļu kopā aritmētiskās darbības tiek definētas tā, lai, tās izpildot ar reāliem skaitļiem, iegūtu tādus pašus rezultātus, kādus iegūst, izpildot šīs darbības saskaņā ar reālo skaitļu darbību izpildīšanas likumiem.

Kompleksā skaitļa algebriskā forma $a + bi$.

Komplekso skaitļu saskaitīšana

Par divu komplekso skaitļu $z_1 = a_1 + b_1 i$ un $z_2 = a_2 + b_2 i$ summu sauc komplekso skaitli $z = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$.

Komplekso skaitļu saskaitīšanai ir spēkā šādas īpašības:

a) pārvietojamības (komutatīvā) īpašība $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$;

b) savienojamības (asociatīvā) īpašība $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.

Divu savstarpēji pretēju komplekso skaitļu summa ir vienāda ar 0:

$$z + (-z) = (a + bi) + (-a - bi) = (a - a) + (b - b)i = 0 + 0i.$$

Divu savstarpēji saistītu komplekso skaitļu summa ir reāls skaitlis:

$$z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = (a + a) + (b - b)i = 2a + 0i = 2a.$$

Komplekso skaitļu summu ģeometriski var interpretēt kā vektoru, kas iegūts, saskaitot kompleksajiem skaitļiem atbilstošos rādiusvektorus.

Piemērs

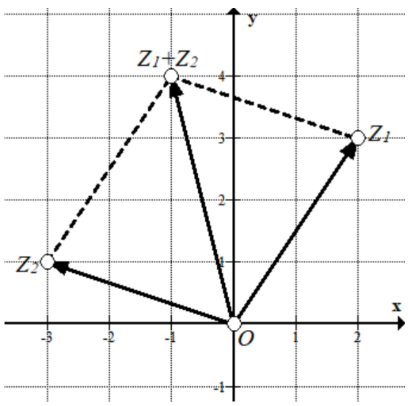
Attēlo ar vektoriem komplekso skaitļu $z_1 = 2 + 3i$ un $z_2 = -3 + i$ summu!

Risinājums

$z_1 + z_2 = 2 + 3i + (-3 + i) = 2 + (-3) + (3 + 1)i = -1 + 4i$

Skaitlim z_1 atbilst vektors $\overrightarrow{(2;\,3)}$, skaitlim z_2 atbilst vektors $\overrightarrow{(-3;\,1)}$, tādēļ skaitlim $z_1 + z_2$ atbilst vektors

$\overrightarrow{(2;\,3)} + \overrightarrow{(-3;\,1)} = \overrightarrow{(-1;\,4)}$.



Komplekso skaitļu atņemšana

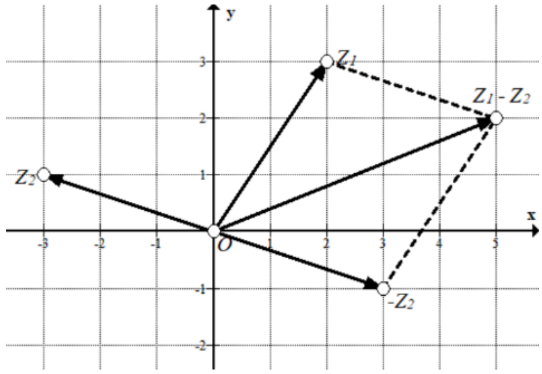
Par divu komplekso skaitļu z_1 un z_2 starpību sauc tādu komplekso skaitli z, kuru saskaitot ar z_2, iegūst skaitli z_1.

Lai no viena kompleksā skaitļa atņemtu otru, ir jāatņem to reālās daļas un imagināro daļu koeficienti.

Komplekso skaitļu starpību ģeometriski var interpretēt kā vektoru, kas vienāds ar kompleksajiem skaitļiem atbilstošo rādiusvektoru starpību.

Piemērs

Attēlo ar vektoriem komplekso skaitļu $z_1 = 2 + 3i$ un $z_2 = -3 + i$ starpību!



Risinājums

$z_1 - z_2 = 2 + 3i - (-3 + i) = 2 - (-3) + (3 - 1)i = 5 + 2i$

Skaitlim z_1 atbilst vektors $\overrightarrow{(2; 3)}$, skaitlim z_2 atbilst vektors $\overrightarrow{(-3; 1)}$, atņemt vektoru nozīmē – pieskaitīt tā pretējo, tādēļ skaitlim $z_1 - z_2$ atbilstošajam punktam var piekārtot vektoru $\overrightarrow{(2; 3)} - \overrightarrow{(-3; 1)} = \overrightarrow{(2; 3)} + \overrightarrow{(3; -1)} = \overrightarrow{(5; 2)}$.

Komplekso skaitļu reizināšana

Par divu komplekso skaitļu $z_1 = a_1 + b_1 i$ un $z_2 = a_2 + b_2 i$ reizinājumu sauc komplekso skaitli $z = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$.

Lai sareizinātu divus kompleksos skaitļus, tos sareizina kā divus binomus, un iegūtā izteiksme ir jāpārveido kompleksā skaitļa algebriskajā formā, ievērojot, ka $i^2 = -1$.

$z_1 z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 i^2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i.$

Komplekso skaitļu reizināšanai ir spēkā šādas **īpašības**:

a) pārvietojamības (komutatīvā) īpašība $z_1 z_2 = z_2 z_1$;

b) savienojamības (asociatīvā) īpašība $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$;

c) sadalāmības (distributīvā) īpašība $(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$.

Savstarpēji saistītu komplekso skaitļu reizinājums ir reāls skaitlis un ir vienāds ar reālās daļas koeficienta kvadrāta un imaginārās daļas koeficienta kvadrāta summu –
$z \cdot \bar{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 - abi + abi - b^2 i^2 = a^2 + b^2$.

Šo rezultātu var izmantot kā formulu $(a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2$.

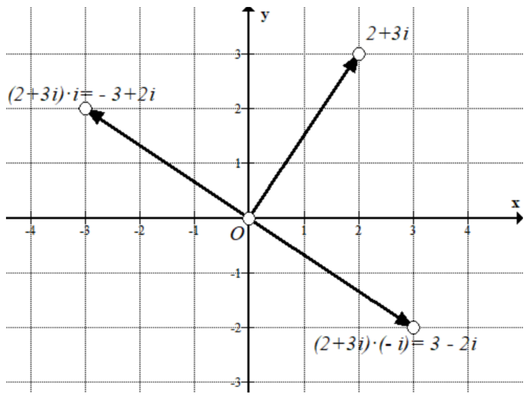
Saskaitīšanas un reizināšanas darbības komplekso skaitļu kopā dod iespēju kompleksos skaitļus uzskatīt par reālo skaitļu vispārinājumu, bet reālos skaitļus – par komplekso skaitļu speciālo gadījumu.

Piemērs

Attēlo ar vektoriem kompleksā skaitļa $z = 2 + 3i$ reizinājumu ar skaitli i un skaitli $-i$!

Risinājums

$(2 + 3i) \cdot i = 2i + 3i^2 = -3 + 2i$



Skaitlim $z = 2 + 3i$ atbilst vektors $\overrightarrow{(2; 3)}$. Pareizinot z ar i, iegūst skaitli, kura atbilstošais rādiusvektors ir $\overrightarrow{(-3; 2)}$. Ja šos divus vektorus sareizina skalāri, iegūst $\overrightarrow{(2; 3)} \cdot \overrightarrow{(-3; 2)} = 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 2 = 0$. Tas parāda, ka tie ir divi savstarpēji perpendikulāri vektori. Tādēļ var apgalvot, ka kompleksā skaitļa reizinājums ar skaitli i ir kompleksajam skaitlim atbilstošā punkta pagrieziens ap koordinātu sistēmas sākumpunktu par 90°.

Savukārt, reizinājums ar skaitli $-i$ ir kompleksajam skaitlim atbilstošā punkta pagrieziens ap koordinātu sistēmas sākumpunktu par −90°, kā tas ir parādīts attēlā.

Komplekso skaitļu kāpināšana

Tāpat kā reāliem skaitļiem, arī kompleksajiem skaitļiem divu vai vairāku vienādu komplekso skaitļu reizināšanu sauc par kāpināšanu.

Izpildot ar komplekso skaitļu kāpināšanu saistītus pārveidojumus, bieži ir jāizmanto imaginārās vienības i pakāpes: $i^2 = -1$, $i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$, $i^4 = i^3 \cdot i = -i \cdot i = -i^2 = -(-1) = 1$, $i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$, $i^6 = i^5 \cdot i = i \cdot i = i^2 = -1$ utt.

Vispārīgajā gadījumā, ja $n \in \mathbb{N}$ vai 0: $i^{4n} = 1$, $i^{4n+1} = i$, $i^{4n+2} = -1$, $i^{4n+3} = -i$.

Tā kā komplekso skaitļu reizināšanu praktiski izpilda pēc divu binomu reizināšanas likuma, tad, kāpinot komplekso skaitli, var lietot saīsinātās reizināšanas formulas:

$(a + bi)^2 = a^2 + 2abi + (bi)^2 = (a^2 - b^2) + 2abi,$

$(a + bi)^3 = a^3 + 3a^2 (bi) + 3a(bi)^2 + (bi)^3 = a^3 + 3a^2bi - 3ab^2 - b^3i = (a^3 - 3ab^2) + (3a^2b - b^3)i.$

Lai iegūtu komplekso skaitļu augstākas pakāpes, tiek izmantots Ņūtona binoma izvirzījums

$(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-1} ab^{n-1} + C_n^n b^n,$

kura koeficientu aprēķināšanai nosaka atbilstošās kombināciju vērtības, tās aprēķinot vai nolasot no Paskāla trijstūra.

1. piemērs

Aprēķini $(1 - 2i)^5$!

Risinājums

$(1 - 2i)^5 = 1 + 5 \cdot (-2i)^1 + 10 \cdot (-2i)^2 + 10 \cdot (-2i)^3 + 5 \cdot (-2i)^4 + (-2i)^5 = 1 - 10i - 40 + 80i + 80 - 32i = 41 + 38i$

2. piemērs

Aprēķini $(2 - 5i)^4$!

Risinājums

Ja kāpinātājs ir pāra skaitlis, tad ir izdevīgi vispirms izkāpināt kvadrātā un tad atbilstošajā pakāpē, kas būs dotais kāpinātājs dalīts ar 2.

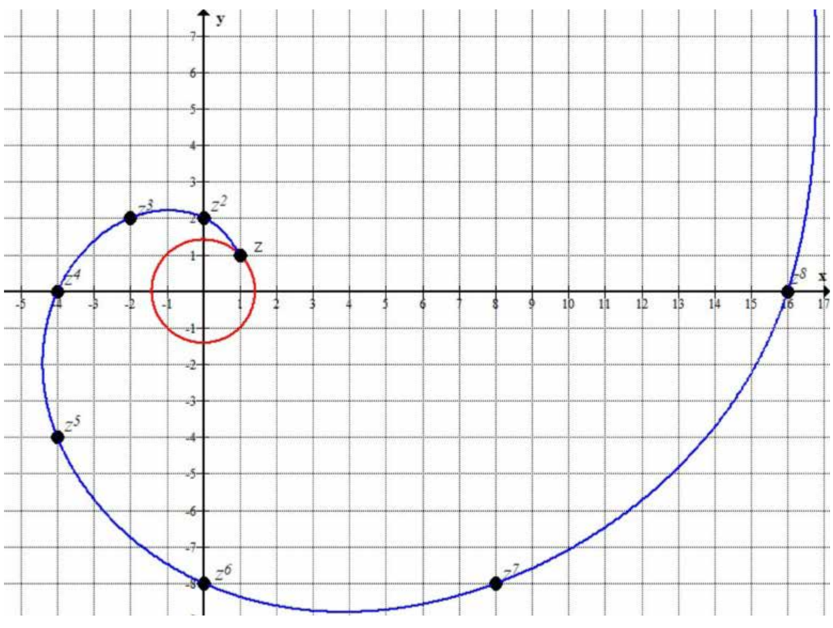
$(2 - 5i)^4 = \left((2 - 5i)^2\right)^2 = (4 - 20i - 25)^2 = (-21 - 20i)^2 = 441 + 840i - 400 = 41 + 840i$

3. piemērs

Dots kompleksais skaitlis $z = 1 + i$. Aprēķini z^2; z^3; ...; z^8 un attēlo punktus, kas atbilst iegūtajiem kompleksajiem skaitļiem.

Risinājums

$z = 1 + i$
$z^2 = 2i$
$z^3 = -2 + 2i$
$z^4 = -4$
$z^5 = -4 - 4i$
$z^6 = -8i$
$z^7 = 8 - 8i$
$z^8 = 16$



Atliekot iegūto komplekso skaitļu atbilstošos punktus un tos savienojot, veidojas spirāle. Šajā piemērā $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} > 1$, tāpēc spirāle veidojas ārpus iezīmētās riņķa līnijas. Ja $|z| = r < 1$, tad spirāle veidosies iezīmētās riņķa līnijas iekšpusē un tieksies uz koordinātu sistēmas sākumpunktu.

Komplekso skaitļu dalīšana

Par divu komplekso skaitļu z_1 un $z_2 \neq 0$ dalījumu sauc tādu komplekso skaitli z, kuru reizinot ar z_2, iegūst skaitli z_1.

Dalot divus kompleksos skaitļus, daļas skaitītājs un saucējs ir jāsareizina ar saucēja saistīto skaitli un pēc tam izteiksme jāuzraksta kompleksā skaitļa algebriskajā formā $a + bi$.

Aplūkosim kompleksos skaitļus $z_1 = a_1 + b_1 i$ un $z_2 = a_2 + b_2 i$, to dalījums

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{(a_1 + b_1 i)\,(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2)\,(a_2 b_1 - a_1 b_2)i}{(a_2^2 + b_2^2)} =$$

$$= \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2)}{(a_2^2 + b_2^2)} + \frac{(a_2 b_1 - a_1 b_2)i}{(a_2^2 + b_2^2)}.$$

Dalījums ir skaitlis $a + bi$, kur $a = \dfrac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$, $b = \dfrac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$.

Kompleksajam skaitlim $z_1 = a_1 + b_1 i$ **apgrieztais skaitlis** ir tāds skaitlis $z_2 = a_2 + b_2 i$, ka $(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = 1$. Skaitli $z_2 = a_2 + b_2 i$ var iegūt kā dalījumu $a_2 + b_2 i = 1 : (a_1 + b_1 i)$, ja $z_1 = a_1 + b_1 i \neq 0 + 0i$. Kompleksajam skaitlim $0 + 0i$ neeksistē apgrieztais skaitlis.

Komplekso skaitļu saknes atrašana

Kāpināšanai apgrieztā darbība ir saknes atrašana.

Par kompleksā skaitļa z_1 n-tās pakāpes sakni sauc tādu komplekso skaitli z, kura n-tā pakāpe ir skaitlis z_1, t.i., $\sqrt[n]{z_1} = z$, ja $z^n = z_1$.

Piemērs

Aprēķini $\sqrt{5 - 12i}$!

Risinājums

Kvadrātsakne ir kompleksais skaitlis $a + bi$, kur $a, b \in \mathbb{R}$.

$\sqrt{5 - 12i} = a + bi$, tad abas puses var kāpināt kvadrātā.

$5 - 12i = (a + bi)^2$, iegūst $5 - 12i = a^2 + 2abi + (bi)^2$ un $5 - 12i = (a^2 - b^2) + 2abi$, no šejienes saskaņā ar komplekso skaitļu vienādību to reālajām daļām un imagināro daļu koeficientiem ir jābūt vienādiem.

$\begin{cases} 5 = a^2 - b^2 \\ -12 = 2ab \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 = a^2 - b^2 \\ -6 = ab \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 = a^2 - b^2 \\ b = \dfrac{-6}{a} \end{cases} \Rightarrow 5 = a^2 - \left(\dfrac{-6}{a}\right)^2$ un risina vienādojumu.

$5 = a^2 - \dfrac{36}{a^2}$, $a \neq 0$, jo $ab = -6$, vienādojumu reizina ar a^2 un iegūst $5a^2 = a^4 - 36 \Rightarrow a^4 - 5a^2 - 36 = 0 \Rightarrow a^2 = 9$ vai $a^2 = -4$, negatīvā vērtība neder, jo $a \in \mathbb{R}$. Tātad $a^2 = 9$ un $a = 3$ vai $a = -3$. Un aprēķina atbilstošās b vērtības $\begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \end{cases}$ vai $\begin{cases} a = -3 \\ b = 2 \end{cases}$ un $\sqrt{5 - 12i} = \pm(3 - 2i)$. Kvadrātsaknei ir divas dažādas vērtības.

Vingrinājumi I

1. Ar kādām reālām x un y vērtībām dotie kompleksie skaitļi ir vienādi?

a) $2x + (3y + 1)i = 8 + 10i$ b) $5 - (4x + 2)i = \frac{1}{2}y + 14i$

c) $(3x + 2) + (2y - 5)i = 50 - 27i$ d) $(2x + 3y - 30) + (x - 6y)i = 0$

2. Attēlo doto komplekso skaitli z koordinātu plaknē, uzraksti saistīto komplekso skaitli $\bar{z}$ un pretējo komplekso skaitli $-z$ un attēlo tos koordinātu plaknē!

a) $z_1 = 5 + 3i$ b) $z_2 = -2 + 4i$ c) $z_3 = 1 - 2i$

d) $z_4 = 5i$ e) $z_5 = -i$ f) $z_6 = 3$

3. Aprēķini dotā kompleksā skaitļa z moduli $|z|$!

a) $z_1 = 8 + 6i$ b) $z_2 = \sqrt{5} - 2i$ c) $z_3 = \frac{3}{4} + i$

d) $z_4 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ e) $z_5 = -1 - \sqrt{3}i$ f) $z_6 = 1 + i$

4. Izpildi darbības!

a) $(16 + 25i) + (-10 + 3i)$ b) $(-2 + i) - (3 + 7i)$

c) $(-2 + 2i) + (13 + 7i)$ d) $(5 + 11i) + (-1 + 4i) - (12 + 8i)$ e) $(3a - 7bi) + (2a + 3bi) - (a - bi)$

5. Aprēķini komplekso skaitļu reizinājumu!

a) $(5 + i)(-2 + 3i)$ b) $(3 + 4i)(6 - 5i)$ c) $(7 - 2i)(3{,}5 - i)$

d) $(0{,}5 + i)(1 + 2i)$ e) $(0{,}5 + 0{,}2i)(2 + 3i)$ f) $(-m + 2ni)(3n - 5mi)$

6. Aprēķini komplekso skaitļu dalījumu!

a) $\frac{2 + 4i}{1 + 3i}$ b) $\frac{2 + i}{2 - i}$ c) $\frac{5}{-4 + 3i}$ d) $\frac{6 + 3i}{-2i}$ e) $\frac{-5i}{3 + i}$

7. Pierādi vienādības!

a) $\frac{6 - i}{3 + 4i} = \frac{13 + 41i}{-25 + 25i}$ b) $\frac{2 + i}{3 - i} = \frac{13 + 4i}{17 - 9i}$

8. Atrisini doto vienādojumu komplekso skaitļu kopā!

a) $(2 - 3i)z = -1 - 5i$ b) $3iz = 18 - 6i$

9. Izpildi kāpināšanu!

a) $(-2i)^4$ b) $(-5i)^3$ c) $(1 - \sqrt{3}i)^3$

d) $(\sqrt{3} + i)^3$ e) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^3$ f) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^3$

10. Aprēķini!

a) $\sqrt{-4i}$ b) $\sqrt{9i}$ c) $\sqrt{-15 + 8i}$ d) $\sqrt{24 - 10i}$

11. Izsaki hipotēzi par i^n vērtībām, ja n ir negatīvs skaitlis! Aprēķini i^{-198}!

12. Izpēti un nosaki vērtības summai $\sum_{k=1}^{n} i^k$, ja $n \in \mathbb{N}$!

Polinoma ar reāliem koeficientiem saknes

Kvadrātvienādojuma risināšana

Aplūkojot kvadrātvienādojumu ar reāliem koeficientiem $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ tika pierādīts apgalvojums: ja kvadrātvienādojuma diskriminants $D = b^2 - 4ac$ ir nenegatīvs, tad šī vienādojuma atrisinājumu nosaka formula $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$. Ja diskriminants $D < 0$, tika apgalvots, ka kvadrātvienādojumam atrisinājuma reālos skaitļos nav. Tā kā iepriekš tika aplūkoti tikai reāli skaitļi, tad šāds apgalvojums bija korekts.

Lai noteiktu sakņu formulu, izmanto binoma kvadrāta atdalīšanas metodi un tad sadalīšanu reizinātājos!

$$
\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2\cdot\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = \\
&= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)\right) = \\
&= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2}\right) = \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{2a}\right) = 0
\end{aligned}
$$

Katru reizinātāju pielīdzinot 0, iegūst kvadrātvienādojuma sakņu formulas. Bet visi šie pārveidojumi ir spēkā arī tad, ja a, b, c ir kompleksie skaitļi, bet saknes tiek meklētas komplekso skaitļu kopā. Tātad pēc kvadrātvienādojumu sakņu formulas var noteikt kvadrātvienādojuma atrisinājumu arī tajā gadījumā, kad vienādojuma koeficienti ir kompleksie skaitļi. Tā kā komplekso skaitļu kopā kvadrātsaknes vilkšanas darbība ir izpildāma jebkuram kompleksajam skaitlim, tad ierobežojums $D < 0$ ir lieks. Šim ierobežojumam nav jēgas komplekso skaitļu kopā, jo netiek definēti jēdzieni "lielāks", "mazāks".

Tādējādi komplekso skaitļu kopā vienādojumam $az^2 + bz + c = 0,\ a \neq 0,\ a, b, c \in \mathbb{C}$ vienmēr eksistē atrisinājums.

Ja $D = b^2 - 4ac = 0$, tad vienādojumam ir viens atrisinājums; ja $D \neq 0$ – vienādojumam ir divi atrisinājumi. Visos gadījumos kvadrātvienādojuma saknēm ir spēkā formula

$z = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, kur ar $\sqrt{D}$ saprotam visas iespējamās kvadrātsaknes vērtības (vienu vai divas). Kvadrātvienādojumam ar kompleksiem koeficientiem ir spēkā arī Vjeta teorēma par saknēm: vienādojumam $az^2 + bz + c = 0,\ a \neq 0$ izpildās

$$
\begin{cases} z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a} \\ z_1 z_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}.
$$

1. piemērs

Atrisini vienādojumu $z^2 + 3z + 3 = 0$!

Risinājums

Pēc kvadrātvienādojuma sakņu formulas aprēķina $z = \dfrac{-3 + \sqrt{9 - 12}}{2} = \dfrac{-3 + \sqrt{-3}}{2}$. Ievērojot, ka $\sqrt{-3} = \sqrt{3i^2} = \pm i\sqrt{3}$, iegūst $z_1 = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_1 = -\dfrac{3}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$. Var ievērot, ka dotajam kvadrātvienādojumam ar reāliem koeficientiem saknes ir savstarpēji saistīti kompleksie skaitļi.

2. piemērs

Atrisini vienādojumu $z^2 - (2+i)z - 1 + 7i = 0$!

Risinājums

Pēc kvadrātvienādojuma sakņu aprēķināšanas formulas iegūst, ka $z = \frac{2+i+\sqrt{(2+i)^2+4(1-7i)}}{2} = \frac{2+i+\sqrt{7-24i}}{2}$.

Lai noteiktu visas $\sqrt{7-24i}$ vērtības, risina vienādojumu $\sqrt{7-24i} = x+iy;\ x, y \in \mathbb{R}$.

Tad $7 - 24i = x^2 + 2xyi - y^2$, t. i., reāliem skaitļiem x un y apmierina vienādojumu sistēmu $\begin{cases} x^2 - y^2 = 7 \\ xy = -12 \end{cases}$, kurai ir divi reāli atrisinājumi $\begin{cases} x = 4 \\ y = -3 \end{cases}$, $\begin{cases} x = -4 \\ y = 3 \end{cases}$.

Tātad $\sqrt{7-24i} = \pm(4-3i)$ un $z_1 = \frac{2+i+4-3i}{2} = 3 - i,\ z_2 = \frac{2+i-4+3i}{2} = -1 + 2i.$

Polinoma ar reāliem koeficientiem saknes

Risinot kvadrātvienādojumus ar reāliem koeficientiem, var ievērot, ka saknes ir savstarpēji saistīti kompleksie skaitļi.

Piemēram, kvadrātvienādojumam $z^2 - 4z + 40 = 0$ saknes ir $z = \frac{4+\sqrt{(-4)^2-4\cdot 40}}{2} = \frac{4+\sqrt{-144}}{2} = \frac{4 \pm 12i}{2} = 2 \pm 6i$, un tās ir savstarpēji saistīti kompleksie skaitļi. Kvadrāttrinomu $z^2 - 4z + 40$ var sadalīt reizinātājos $(z-(2+6i))(z-(2-6i))$.

Ir patiesa teorēma: Ja z ir polinoma ar reāliem koeficientiem sakne, tad arī $\bar{z}$ (kompleksās saknes saistītais) ir šī polinoma sakne.

Šo teorēmu pierāda, izmantojot saistītā kompleksā skaitļa īpašības, kuras šeit tiks uzskaitītas bez pierādījuma, un tās var pierādīt patstāvīgi.

Saistītā kompleksā skaitļa <u>īpašības</u>.

1. $\bar{z} = z$, ja $z \in \mathbb{R}$
2. $\overline{(z_1 \pm z_2)} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$
3. $\overline{(z_1 \cdot z_2)} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
4. $\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n, n \in \mathbb{N}$ (pierāda ar MIP)

Teorēma: Ja kompleksais skaitlis z_1 ir polinoma $P(z)$ ar reāliem koeficientiem sakne, tad arī $\overline{z_1}$ (kompleksās saknes saistītais) ir šī polinoma sakne.

Pierādījums

Pierādījums būs trešās pakāpes polinomam $P(z) = az^3 + bz^2 + cz + d$, kur $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, bet līdzīgā veidā pierādījumu var veikt arī vispārīgā veidā n-tās pakāpes polinomam.

Ja z_1 ir polinoma sakne, tad $P(z_1) = az_1^3 + bz_1^2 + cz_1 + d = 0$. Ja kompleksie skaitļi ir vienādi, tad to kompleksi saistītie arī būs vienādi jeb $\overline{az_1^3 + bz_1^2 + cz_1 + d} = \bar{0}$.

Pēc 2. un 1. īpašības: $\overline{(az_1^3)} + \overline{(bz_1^2)} + \overline{(cz_1)} + \bar{d} = 0$. Pēc 3. un 1. īpašības: $a\overline{(z_1^3)} + b\overline{(z_1^2)} + c\,\overline{z_1} + d = 0$, un pēc 4. īpašības: $a(\overline{z_1})^3 + b(\overline{z_1})^2 + c\,\overline{z_1} + d = 0 \Rightarrow P(\overline{z_1}) = 0$ un $\overline{z_1}$ ir šī polinoma sakne.

Var ievērot, ka, ja kvadrāttrinoma saknes ir savstarpēji saistīti kompleksie skaitļi, tad atbilstošais kvadrāttrinoms būs ar reāliem koeficientiem. Tas ir skaidrojams ar to, ka šīs savstarpēji saistītās saknes summā un reizinājumā dod reālus skaitļus un pēc Vjeta teorēmas var uzrakstīt kvadrāttrinomu ar reāliem koeficientiem. Šis kvadrāttrinoms būs viens no polinoma reizinātājiem, ja dotie savstarpēji saistītie kompleksie skaitļi ir polinoma saknes.

1. piemērs

Skaitlis $1 + 2i$ ir polinoma $P(z) = z^3 - 5z^2 + 11z - 15$ viena no saknēm. Nosaki atlikušās polinoma saknes!

Risinājums

Tā kā polinoma koeficienti ir reāli skaitļi, tad, – ja polinoma sakne ir skaitlis $1 + 2i$, tad sakne ir arī tā saistītais skaitlis $1 - 2i$. Ar šīm divām saknēm var atrast vienu polinoma reizinātāju kvadrāttrinomu:

$\begin{cases} z_1 + z_2 = 1 + 2i + 1 - 2i = 2 \\ z_1 z_2 = (1 + 2i)(1 - 2i) = 1 + 4 = 5 \end{cases}$, tāpēc viens reizinātājs ir $z^2 - 2z + 5$. Tad var izdalīt doto polinomu ar iegūto kvadrāttrinomu un iegūt atlikušo reizinātāju, jo dotais ir trešās pakāpes polinoms.

$$
\begin{array}{l}
(z^3 - 5z^2 + 11z - 15) : (z^2 - 2z + 5) = z - 3 \\
\underline{-(z^3 - 2z^2 + 5z)} \\
\quad -3z^2 + 6z - 15 \\
\underline{\quad -(-3z^2 + 6z - 15)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Polinomu var uzrakstīt $z^3 - 5z^2 + 11z - 15 = (z^2 - 2z + 5)(z - 3) = 0$ un iegūt atlikušo sakni $z - 3 = 0 \Rightarrow z = 3$.

Atbilde

Divas citas polinoma saknes ir $1 + 2i$ un 3.

2. piemērs

Uzraksti viszemākās pakāpes polinomu ar veseliem koeficientiem, ja tā saknes ir –2; – 2; $1 + \sqrt{3i}$!

Risinājums

Lai polinoms būtu ar veseliem (reāliem) koeficientiem, tā vienai saknei ir jābūt dotās kompleksās saknes saistītajai $1 - \sqrt{3i}$. Līdz ar to viszemākā polinoma pakāpe ir ceturtā, jo ir četras saknes.

$\begin{cases} z_1 + z_2 = 1 + \sqrt{3}i + 1 - \sqrt{3}i = 2 \\ z_1 z_2 = (1 + \sqrt{3}i)(1 - \sqrt{3}i) = 1 + 3 = 4 \end{cases}$, un viens polinoma reizinātājs ir $z^2 - 2z + 4$.

Polinoms

$$
\begin{aligned}
P(z) &= (z^2 - 2z + 4)(z + 2)(z + 2) = (z^2 - 2z + 4)(z^2 + 4z + 4) = \\
&= z^4 + 4z^3 + 4z^2 - 2z^3 - 8z^2 - 8z + 4z^2 + 16z + 16 = z^4 + 2z^3 + 8z + 16
\end{aligned}
$$

Vingrinājumi II

1. Atrisini kvadrātvienādojumu un attēlo tā saknes koordinātu plaknē!
   a) $z^2 + 2z + 2 = 0$ b) $z^2 - 6z + 18 = 0$
   c) $z^2 - 2z + 5 = 0$ d) $2z^2 + 14z + 65 = 0$

2. Atrisini kvadrātvienādojumu un pārbaudi atrisinājumu, izmantojot Vjeta teorēmu!
   a) $z^2 - 8z + 25 = 0$ b) $z^2 + 10z + 29 = 0$ c) $z^2 - 12z + 37 = 0$

3. Sadali reizinātājos!
   a) $z^2 + 9$ b) $x^2 + y^2$ c) $m^4 + n^2$ d) $z^2 - 4z + 2$

4. Uzraksti viszemākās pakāpes vienādojumu ar reāliem koeficientiem, ja tā saknes ir 2 un i!

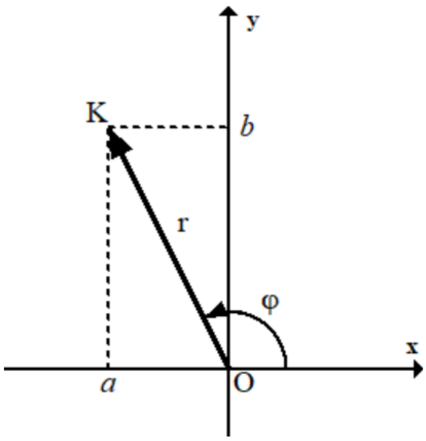
5. Uzraksti polinomu ar koeficientiem, veseliem skaitļiem un zemāko iespējamo pakāpi, ja tā saknes ir -2; -3; $1 + \sqrt{3}i$!

6. Zināms, ka $z = 5 + 2i$ ir polinoma $f(z) = z^3 - 7z^2 - z + 87$ sakne. Atrodi citas saknes!

Kompleksie skaitļi trigonometriskā formā

Kompleksā skaitļa pieraksts, lietojot trigonometriskās funkcijas

Kompleksā skaitļa $z = a + bi$ $(z \neq 0)$ pierakstu formā $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ sauc par kompleksā skaitļa trigonometrisko formu.



Aplūkosim komplekso skaitli $z = a + bi$, kuru koordinātu plaknē attēlo ar punktu $K\,(a;\, b)$ jeb ar vektoru $\overrightarrow{OK}$. Kompleksā skaitļa modulis $|z|$ ir r. Ģeometriski $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ ir vektora $\overrightarrow{OK}$ garums. Leņķi φ sauc par kompleksā skaitļa argumentu. Ģeometriski tas izsaka leņķi, kuru vektors $\overrightarrow{OK}$ veido ar $0x$ ass pozitīvo virzienu. Lai kompleksā skaitļa z arguments būtu definēts viennozīmīgi, jābūt spēkā nosacījumam $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Leņķi φ šādās robežās sauc par kompleksā skaitļa argumenta galveno vērtību un apzīmē $\varphi = \arg z$. Visas pārējās argumenta vērtības apzīmē šādi: $\mathrm{Arg}\, z = \arg z + 2\pi n;\ (n \in \mathbb{Z})$. Kompleksā skaitļa argumenta galvenā vērtībā tiek definēta arī intervālā $(-\pi;\, \pi]$., t. i., $-\pi < \arg z \leqslant \pi$, bet saknes aprēķināšanai ir ērtāk, ja $0 \leqslant \arg z < 2\pi$.

Ja $z = 0$, tad modulis $r = |z| = 0$, bet arguments nav definēts.

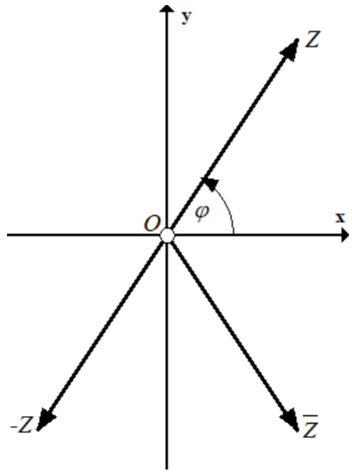
No trigonometrisko funkciju definīcijām izriet, ka $a = r\cos\varphi$ un $b = r\sin\varphi$. Ievietojot šīs a un b izteiksmes kompleksā skaitļa izteiksmē $z = a + bi$, iegūstam, ka $z = r\cos\varphi + (r\sin\varphi)i$ jeb $z = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Lai algebriskā formā $a + bi$ dotu komplekso skaitli, pārveidotu trigonometriskā formā $r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, jāatrod

1) kompleksā skaitļa modulis pēc formulas $r = \sqrt{a^2 + b^2}$,
2) kompleksā skaitļa argumenta galvenā vērtība, izmantojot sakarības $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$, no kurienes $\mathrm{tg}\varphi = \frac{b}{a}$ jeb $\varphi = \mathrm{arctg}\frac{b}{a}$, ja $a \neq 0$ un leņķis φ ir šaurs. Parasti vektora $\overrightarrow{OK}$ un $0x$ ass veidoto leņķi φ un kompleksā skaitļa argumentu nosaka, izmantojot **zīmējumu**.

Apkopojot informāciju par argumenta vērtībām, iegūstam:

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}, & \text{ja } a > 0,\ b > 0; \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{ja } a = 0,\ b > 0; \\ \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a} + \pi, & \text{ja } a < 0; \\ \dfrac{3\pi}{2}, & \text{ja } a = 0,\ b < 0; \\ \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a} + 2\pi, & \text{ja } a > 0,\ b < 0. \end{cases}$$

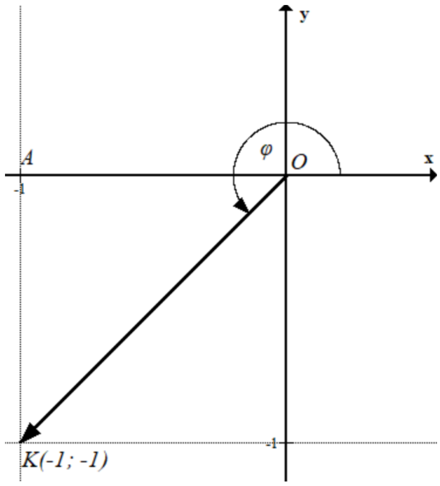


Ja $z = \cos\varphi + i\sin\varphi = cis\varphi$, tad tam pretējo var izteikt kā $-z = cis\,(\pi + \varphi)$, bet saistīto $\overline{z} = cis(2\pi - \varphi)$, dažkārt ir ērti izmantot argumentu – φ, tātad $\overline{z} = cis\,(2\pi - \varphi) = cis\,(-\varphi)$.

(Šeit un turpmāk īsākam izteiksmes $\cos\varphi + i\sin\varphi$ pierakstam lietots apzīmējums $cis\varphi$. Šādu apzīmējumu izmanto arī citu valstu mācību literatūrā.)

1. Piemērs

Pārveidot trigonometriskā formā komplekso skaitli $z = -1 - i$!



Risinājums

$|\overrightarrow{OK}| = r = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$

Tā kā punkts $K(-1; -1)$ atrodas III kvadrantā, tad vispirms tiek noteikts šaurais leņķis $\measuredangle AOK$ no taisnleņķa trijstūra AOK, kur taisnais leņķis ir $\measuredangle OAK$.

$\measuredangle AOK = \operatorname{arctg}\frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}$ un $\varphi = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$.

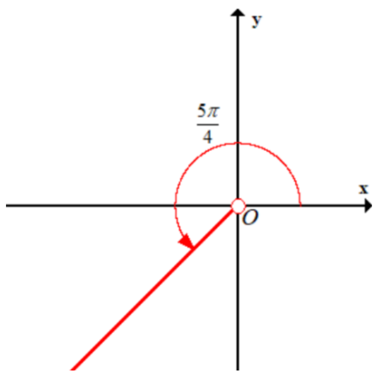
Vai arī, izmantojot arg z formulas, $a = -1 < 0$, tādēļ

$\varphi = \arg z = \operatorname{arctg}\frac{-1}{-1} + \pi = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$ un tādējādi

$z = -1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right).$

2. piemērs

Kādu kompleksās plaknes punktu kopu nosaka nosacījums arg $z = \frac{5\pi}{4}$?



Risinājums

Ja ir zināms tikai arguments, tad visi punkti, kas atbilst dotajam nosacījumam, atradīsies uz stara, kas veidos leņķi $\frac{5\pi}{4} = 225°$ ar $0x$ ass pozitīvo virzienu, stara sākumpunkts ir koordinātu sistēmas sākumpunktā, bet šis punkts nebūs atrisinājuma punktu kopā, jo kompleksajam skaitlim $z = 0$ arguments nav definēts.

Trigonometriskā formā dotu komplekso skaitļu reizināšana

Pieņemsim, ka kompleksie skaitļi $z_1 = a_1 + b_1 i$ un $z_2 = a_2 + b_2 i$ ir izteikti trigonometriskā formā:
$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ un $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$.

Reizinājuma $z_1 z_2$ izteiksmi algebriskā formā iegūst, ja $a_1 + b_1 i$ un $a_2 + b_2 i$ reizina kā divus reālu skaitļu binomus, ievērojot, ka $i^2 = -1$, t. i., $z_1 z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$.

Analogi var reizināt arī trigonometriskā formā dotus kompleksos skaitļus, turklāt iegūto izteiksmi iespējams vienkāršot, izmantojot leņķu summas sinusa un kosinusa formulas:

$$\begin{aligned}
z_1 z_2 &= r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \\
&= r_1 r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + i^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2) = \\
&= r_1 r_2((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)) = \\
&= r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).
\end{aligned}$$

Tātad $r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$,
trigonometriskā formā dotu komplekso skaitļu reizinājuma modulis ir vienāds ar šo skaitļu moduļu reizinājumu, bet argumentu atrod, saskaitot doto skaitļu argumentus, t.i.,
$|z_1 z_2| = |z_1|\cdot|z_2|$ un $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) + 2\pi k$, kur k vietā jāņem tāds vesels skaitlis, lai izpildītos nosacījums $0 \leqslant \arg(z_1 z_2) < 2\pi$.

Piemērs

Sareizini kompleksos skaitļus $z_1 = 2(\cos 240° + i\sin 240°)$ un $z_2 = 4(\cos 150° + i\sin 150°)$!

Risinājums

Šo skaitļu moduļu reizinājums ir $r_1 r_2 = 2\cdot 4 = 8$. Argumentu summa $\varphi_1 + \varphi_2 = 240° + 150° = 390°$. Taču reizinājuma $z_1 z_2$ argumentam jābūt robežās $0° \leqslant \arg(z_1 z_2) < 360°$, tāpēc reizinājuma arguments ir $240° + 150° + 360°\cdot k$, kur $k = -1$ un $240° + 150° - 360° = 30°$. Tātad $z_1 z_2 = 2(\cos 240° + i\sin 240°)\cdot 4(\cos 150° + i\sin 150°) =$
$= 8(\cos 30° + i\sin 30°)$, ko, zinot trigonometrisko funkciju vērtības, var uzrakstīt arī algebriskā formā:

$$z_1 z_2 = 8(\cos 30° + i\sin 30°) = 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\cdot\frac{1}{2}\right) = 4\sqrt{3} + 4i.$$

Trigonometriskā formā dotu komplekso skaitļu dalīšana

Pieņemsim, ka kompleksie skaitļi $z_1 = a_1 + b_1 i$ un $z_2 = a_2 + b_2 i$ izteikti trigonometriskā formā:
$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ un $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$.

Trigonometriskā formā dotu komplekso skaitļu dalījuma $\frac{z_1}{z_2}$ formulu iegūst līdzīgi kā kompleksajiem skaitļiem algebriskā formā, turklāt iegūto izteiksmi iespējams vienkāršot, izmantojot leņķu starpības sinusa un kosinusa formulas:

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\, r_2(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)\, r_2(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} = \\
&= \frac{r_1 r_2}{r_2^2}\cdot\frac{\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 - i^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2}{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2} = \\
&= \frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2)}{1} = \\
&= \frac{r_1}{r_2}\cdot(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).
\end{aligned}$$

Tātad $\frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}\cdot(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$, trigonometriskā formā dotu komplekso skaitļu dalījuma modulis ir vienāds ar šo moduļu dalījumu, bet argumentu atrod, atņemot doto skaitļu argumentus, t.i.,
$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ un $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2 + 2\pi k$, kur k vietā jāņem tāds vesels skaitlis, lai izpildītos nosacījums
$0 \leqslant \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) < 2\pi$.

Ja $z = r\,(\cos\varphi + i\,\sin\varphi)$ $(z \neq 0)$, tad tam apgriezto $\frac{1}{z}$ var iegūt, uzrakstot $1 = \cos 0 + i\,\sin 0$ un abus kompleksos skaitļus izdalot: $\frac{1}{z} = \frac{\cos 0 + i\,\sin 0}{\cos\varphi + i\,\sin\varphi} = \cos(0 - \varphi) + i\,\sin(0 - \varphi) = \cos(-\varphi) + i\,\sin(-\varphi)$ jeb $\cos(2\pi - \varphi) + \sin(2\pi - \varphi)$.

Piemērs

Izdali kompleksos skaitļus $z_1 = 6(\cos 45° + i\,\sin 45°)$ un $z_2 = 2(\cos 120° + i\,\sin 120°)$!

Risinājums

Šo skaitļu moduļu dalījums ir $\frac{r_1}{r_2} = \frac{6}{2} = 3$. Argumentu starpība ir $\varphi_1 - \varphi_2 = 45° - 120° = -75°$, un tā neatrodas intervālā $[0°;\,360°)$. Tāpēc dalījuma arguments $45° - 120° + 360° \cdot k$, kur $k = 1$, ir $45° - 120° + 360° = 285°$. Tātad

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{6(\cos 45° + i\,\sin 45°)}{2(\cos 120° + i\,\sin 120°)} = 3(\cos 285° + i\,\sin 285°).$$

Vingrinājumi III

1. Nosaki komplekso skaitļu z_1 un z_2 reizinājumu $z_1 z_2$!
   - a) $z_1 = 3(\cos 20° + i\,\sin 20°)$, $z_2 = 4(\cos 155° + i\,\sin 155°)$
   - b) $z_1 = 5(\cos 50° + i\,\sin 50°)$, $z_2 = 2(\cos 170° + i\,\sin 170°)$
   - c) $z_1 = 2(\cos 150° + i\,\sin 150°)$, $z_2 = 3(\cos 140° + i\,\sin 140°)$
   - d) $z_1 = 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\sin\frac{\pi}{6}\right)$, $z_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\,\sin\frac{5\pi}{3}\right)$
2. Nosaki komplekso skaitļu z_1 un z_2 dalījumu $\frac{z_1}{z_2}$!
   - a) $z_1 = 12(\cos 55° + i\,\sin 55°)$, $z_2 = 3(\cos 35° + i\,\sin 35°)$
   - b) $z_1 = 4(\cos 170° + i\,\sin 170°)$, $z_2 = 2(\cos 200° + i\,\sin 200°)$
   - c) $z_1 = 10(\cos 250° + i\,\sin 250°)$, $z_2 = 5(\cos 80° + i\,\sin 80°)$
   - d) $z_1 = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\sin\frac{\pi}{6}\right)$, $z_2 = 3\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\,\sin\frac{2\pi}{3}\right)$
3. Izpildi darbības un iegūto rezultātu pārveido kompleksā skaitļa algebriskajā formā!
   - a) $2(\cos 20° + i\,\sin 20°) \cdot 6(\cos 40° + i\,\sin 40°)$
   - b) $3(\cos 15° + i\,\sin 15°) \cdot 5(\cos 165° + i\,\sin 165°)$
   - c) $4(\cos 290° + i\,\sin 290°) \cdot (\cos 25° + i\,\sin 25°)$
   - d) $5\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\,\sin\frac{2\pi}{3}\right) \cdot 4\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\,\sin\frac{11\pi}{6}\right)$
   - e) $4(\cos 75° + i\,\sin 75°) : 2(\cos 30° + i\,\sin 30°)$
   - f) $6(\cos 120° + i\,\sin 120°) : 3(\cos 30° + i\,\sin 30°)$
   - g) $2(\cos 180° + i\,\sin 180°) : (\cos 150° + i\,\sin 150°)$
   - h) $8(\cos 315° + i\,\sin 315°) : 2(\cos 90° + i\,\sin 90°)$

Trigonometriskā formā dotu komplekso skaitļu kāpināšana

Kompleksā skaitļa z pakāpi z^n ar naturālu kāpinātāju definē kā n vienādu komplekso skaitļu reizinājumu: $z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{n\ reizes}$.

Pakāpi z^n var viegli aprēķināt, izmantojot trigonometriskā formā dotu komplekso skaitļu reizināšanas likumu. Ja $z = r(\cos\varphi + \sin\varphi)$, tad $z^2 = z \cdot z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \cdot r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$ un $z^3 = z^2 \cdot z = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi) \cdot r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r^3(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi)$.

Analogi $z^4 = r^4(\cos 4\varphi + i\sin 4\varphi)$ un, ja $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, tad $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$, kur $n \in \mathbb{N}$. Šo vienādību sauc par Muavra (Ābrahams de Muavrs (1667–1754), franču izcelsmes angļu matemātiķis) formulu.

To pierāda ar MIP.

Muavra teorēma: Ja $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, tad $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$, kur $n \in \mathbb{N}$.

Pierādījums

Ja $n = 1$, tad $z^1 = r^1(\cos(1 \cdot \varphi) + i\sin(1 \cdot \varphi)) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, kas ir patiess pēc dotā.

Pieņem, ka vienādība ir patiesa, ja $n = k$, $k \in \mathbb{N}$ $z^k = r^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi)$.

Aplūko gadījumu, kad $n = k + 1$, un pārbauda vienādības $z^{k+1} = r^{k+1}(\cos(k+1)\varphi + i\sin(k+1)\varphi)$ patiesumu.

No pieņēmuma, ka vienādība ir patiesa $n = k$, iegūst

$$z^{k+1} = z^k \cdot z = r^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi) \cdot r(\cos\varphi + i\sin\varphi) =$$
$$= r^k \cdot r((\cos k\varphi \cos\varphi - \sin k\varphi \sin\varphi) + i(\sin k\varphi \cos\varphi + \cos k\varphi \sin\varphi)) =$$
$$= r^{k+1}(\cos(k\varphi + \varphi) + i\sin(k\varphi + \varphi)) =$$
$$= r^{k+1}(\cos(k+1)\varphi + i\sin(k+1)\varphi).$$

Izmantojot leņķu summas sinusa un kosinusa formulas, iegūstam patiesu vienādību.

Tā kā izpildās MIP bāze un induktīvā pāreja, vienādība ir patiesa visiem naturāliem n.

Līdz ar to iegūstam šādu likumu:
Trigonometriskā formā dota kompleksā skaitļa pakāpes modulis ir vienāds ar skaitļa moduļa pakāpi, bet argumentu atrod, dotā skaitļa argumentu reizinot ar kāpinātāju, t. i.,
$|z^n| = |z|^n$ un $\arg(z^n) = n \cdot \arg(z) + 2\pi k$, jo sinusa un kosinusa funkcijas periods ir 2π, kur k ir kāds vesels skaitlis, lai būtu spēkā nosacījums $0 \leqslant \arg\left(z^n\right) < 2\pi$.

Muavra teorēma tika pierādīta naturālam kāpinātājam, bet šī formula ir patiesa arī jebkuram veselam kāpinātājam.

1. piemērs

Aprēķini z^5, ja $z = 2(\cos 120° + i\sin 120°)$!

Risinājums

Dotā kompleksā skaitļa moduļa pakāpe ir $r^5 = 2^5 = 32$. Argumenta reizinājums ar kāpinātāju $120° \cdot 5 = 600°$ ir leņķis, kas neatrodas intervālā $[0°; 360°)$.

$5 \cdot 120° + 360° \cdot k$, ja $k = -1$, ir $5 \cdot 120° + 360° \cdot (-1) = 600° - 360° = 240°$ un $z^5 = 32(\cos 240° + i\sin 240°)$

2. piemērs

Aprēķini z^3, ja $z = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$!

Risinājums

$$z^3 = \left(4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\right)^3 = 4^3\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3} \cdot 3\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3} \cdot 3\right)\right) = 64\,(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = 64\,(\cos 0 + i\sin 0) = 64$$

3. piemērs

Aprēķini z^6, ja $z = 1 + i$!

Risinājums

$$z^6 = (1+i)^6 = \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^6 = \left(\sqrt{2}\right)^6\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot 6\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot 6\right)\right) =$$

$$= 8\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = 8(0 - i) = -8\,i$$

Šo rezultātu varēja iegūt, arī izmantojot Ņūtona binoma izvirzījumu

$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$:

$(1+\mathrm{i})^6 = 1 + 6i + 15i^2 + 20i^3 + 15i^4 + 6i^5 + i^6 = 1 + 6i - 15 - 20i + 15 + 6i - 1 = -8i.$

Jo lielāka pakāpe, jo vairāk aprēķinu jāveic, izmantojot Ņūtona binoma izvirzījumu, un tāpēc ir ērtāk kāpināt kompleksos skaitļus, kas izteikti trigonometriskā formā.

Trigonometriskā formā dotu komplekso skaitļu saknes aprēķināšana

Kompleksā skaitļa kāpināšanai apgrieztā darbība ir saknes aprēķināšana no kompleksā skaitļa.

Par n-tās pakāpes sakni no kompleksā skaitļa z sauc tādu komplekso skaitli ω, kura n-tā pakāpe ir vienāda ar z, t. i., $\sqrt[n]{z} = \omega$, ja $\omega^n = z$.

Parasti sakni aprēķina, ja kompleksais skaitlis ir dots trigonometriskā formā. Pieņemsim, ka $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ un $\omega = p(\cos\alpha + i\sin\alpha)$. Lai atrastu kompleksā skaitļa ω moduli p un argumentu α, izmantojam vienādību $\omega^n = z$ jeb $(p(\cos\alpha + i\sin\alpha))^n = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Tad saskaņā ar trigonometriskā formā dota kompleksā skaitļa kāpināšanas likumu $p^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha) =$ $= r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Kompleksie skaitļi ir vienādi tad un tikai tad, ja ir vienādas to reālās daļas un imagināro daļu koeficienti (viens punkts koordinātu plaknē), tāpēc $\begin{cases} p^n\cos n\alpha = \mathrm{r}\cos\varphi \\ p^n\sin n\alpha = \mathrm{r}\sin\varphi \end{cases}$.

Tā kā vienādu komplekso skaitļu moduļi ir vienādi, tad no šīm vienādībām izriet, ka $p^n = r$ un $n\alpha = \varphi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$, jeb $p = \sqrt[n]{r}$ un $\alpha = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}$. Ja pēdējā vienādībā k vietā ievieto skaitļus 0; 1; 2; 3 ...; *n* – *1*, tad aprēķinātās α vērtības atbilst dažādiem rādiusvektoriem trigonometriskajā riņķī, un tātad tās nosaka dažādus kompleksos skaitļus.

Tādējādi iegūst šādu trigonometriskā formā dota kompleksā skaitļa saknes aprēķināšanas formulu

$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$, kur $k = 0; 1; 2; 3 \ldots; n-1$.

Tātad n-tās pakāpes saknei no kompleksā skaitļa z ir n dažādas vērtības $\omega_0; \omega_1; \omega_2; \ldots; \omega_{n-1}$. Ja šos kompleksos skaitļus attēlo ar punktiem koordinātu plaknē un katrus divus tuvākos punktus savieno ar nogriezni, tad iegūst regulāru n-stūri, kas ievilkts riņķa līnijā, kuras rādiuss ir $\sqrt[n]{\mathrm{r}}$ $(n > 2)$.

1. piemērs

Aprēķini $\sqrt[3]{1 + \sqrt{3}i}$!

Risinājums

Vispirms pārveido komplekso skaitli $1 + \sqrt{3}i$ trigonometriskā formā.

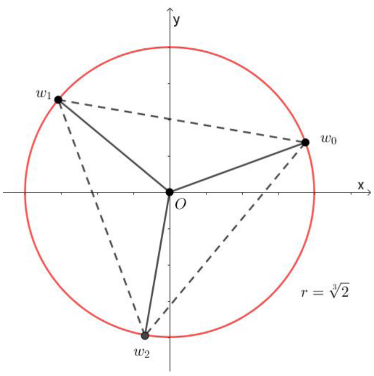
Tā kā punkts koordinātu plaknē atrodas pirmajā kvadrantā, tad $r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ un $\varphi = \mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3}$, kā arī $1 + \sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\mathrm{cis}\,\frac{\pi}{3}$.

Izmantojot formulu kompleksā skaitļa trigonometriskajā formā saknes noteikšanai, iegūst $\sqrt[3]{1+\sqrt{3}i} = \sqrt[3]{2\text{cis}\frac{\pi}{3}} = \sqrt[3]{2}\,\text{cis}\,\dfrac{\frac{\pi}{3}+2\pi k}{3} = \sqrt[3]{2}\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi}{3}\cdot k\right)$, kur k = 0; 1; 2. Ievietojot šajā izteiksmē k vietā norādītos skaitļus, atrod trīs kompleksā skaitļa $1+\sqrt{3}i$ kubsaknes vērtības:

ja $k=0$, tad $\omega_0 = \sqrt[3]{2}\,\text{cis}\,\frac{\pi}{9} = \sqrt[3]{2}\,\text{cis}20°$;

ja $k=1$, tad $\omega_1 = \sqrt[3]{2}\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{2}\,\text{cis}\frac{7\pi}{9} = \sqrt[3]{2}\,\text{cis}140°$;

ja $k=2$, tad $\omega_2 = \sqrt[3]{2}\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{9}+\frac{4\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{2}\,\text{cis}\frac{13\pi}{9} = \sqrt[3]{2}\,\text{cis}260°$.



Savukārt, ja $k=3$, tad $\omega_3 = \sqrt[3]{2}\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{9}+\frac{6\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{2}\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{9}+2\pi\right) =$ $= \sqrt[3]{2}\,\text{cis}\frac{\pi}{9} = \sqrt[3]{2}\,\text{cis}20° = \omega_0$ un punkti sakrīt, tas arī parāda, ka kubsaknei no kompleksā skaitļa ir tikai trīs atšķirīgas vērtības.

Kompleksajiem skaitļiem ω_0; ω_1; ω_2 atbilstošie punkti koordinātu plaknē atrodas regulāra trijstūra virsotnēs, kurš ievilkts riņķa līnijā, kura rādiuss ir $\sqrt[3]{2}$. Komplekso skaitļu argumentu vērtības mainās par $\frac{2\pi}{3} = 120°$.

2. piemērs

Aprēķini $\sqrt[4]{-16}$!

Risinājums

Reālo skaitli −16 uzraksta trigonometriskā formā: $-16 = 16(\cos\pi + i\sin\pi) = 16\text{cis}\pi$.

Izmantojot formulu kompleksā skaitļa trigonometriskajā formā saknes noteikšanai, iegūst $\sqrt[4]{-16} = \sqrt[4]{16\text{cis}\pi} = \sqrt[4]{16}\text{cis}\left(\frac{\pi+2\pi k}{4}\right) = 2\text{cis}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\cdot k\right)$, kur $k = 0; 1; 2; 3$.

Ievietojot šajā izteiksmē k vietā norādītos skaitļus, atrod četras $\sqrt[4]{-16}$ vērtības:

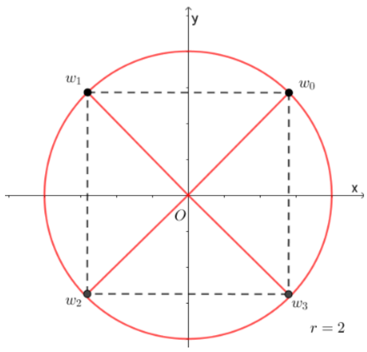
ja $k=0$, tad $\omega_0 = 2\text{cis}\frac{\pi}{4}$ jeb algebriskā formā $2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}+i\sqrt{2}$;

ja $k=1$, tad $\omega_1 = 2\text{cis}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right) = 2\text{cis}\frac{3\pi}{4}$ jeb algebriskā formā $2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}+i\sqrt{2}$;

ja $k=2$, tad $\omega_2 = 2\text{cis}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{2}\right) = 2\text{cis}\frac{5\pi}{4}$ jeb algebriskā formā $2\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}-i\sqrt{2}$;

ja $k=3$, tad $\omega_3 = 2\text{cis}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{2}\right) = 2\text{cis}\frac{7\pi}{4}$ jeb algebriskā formā $2\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}-i\sqrt{2}$.

Šiem kompleksajiem skaitļiem atbilstošie punkti koordinātu plaknē atrodas regulāra četrstūra virsotnēs, kurš ievilkts riņķī ar rādiusu $r = 2$. Komplekso skaitļu argumentu vērtības mainās par $\frac{\pi}{2} = 90°$.



Vingrinājumi IV

1. Aprēķini trigonometriskā formā doto komplekso skaitļu pakāpes!
   a) $(2(\cos 60° + i\sin 60°))^3$ b) $(\cos 20° + i\sin 20°)^{20}$
   c) $(3(\cos 150° + i\sin 150°))^2$ d) $(2(\cos 315° + i\sin 315°))^5$
2. Pārveido trigonometriskā formā dotos kompleksos skaitļus un aprēķini pakāpi, lietojot Muavra formulu!
   a) $(3 + 3i)^2$ b) $(\sqrt{3} + i)^3$
   c) $\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^4$ d) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^6$
   e) $\left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^4$ f) $(-1 + \sqrt{3}i)^5$
3. Atrodi un attēlo ģeometriski doto komplekso skaitļu saknes!
   a) $\sqrt[3]{27(\cos 45° + i\sin 45°)}$ b) $\sqrt[6]{64(\cos 180° + i\sin 180°)}$
   c) $\sqrt[4]{\cos 100° + i\sin 100°}$ d) $\sqrt[5]{32(\cos 150° + i\sin 150°)}$
4. Pārveido trigonometriskā formā kompleksos skaitļus un atrodi saknes!
   a) $\sqrt[3]{-8 + 8i}$ b) $\sqrt[4]{1 + \sqrt{3}i}$ c) $\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i}$
   d) $\sqrt[6]{64i}$ e) $\sqrt[3]{-i}$ f) $\sqrt[4]{i}$
5. Pārveido trigonometriskā formā kompleksos skaitļus, atrodi saknes un attēlo tās ģeometriski!
   a) $\sqrt[3]{8}$ b) $\sqrt[4]{-1}$ c) $\sqrt[6]{1}$
   d) $\sqrt[6]{-64}$ e) $\sqrt[3]{-8}$ f) $\sqrt[4]{16}$
6. Nosaki mazāko naturālo n vērtību, kurai $(1 - i)^n$ ir
   a) reāls skaitlis,
   b) imaginārs skaitlis!

Eilera formula un kompleksā skaitļa eksponentforma

Kompleksos skaitļus var pierakstīt ar eksponenti, izmantojot Eilera formulu:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Šī ir definīcija, bet var rasties jautājumi, kāpēc šī vienādība ir patiesa. Var parādīt, ka izteiksmes abas puses ir vienādas ar funkciju izvirzījumiem pakāpju rindās (pēc Maklorena formulas):

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!};$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!};$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

Apskatot $e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \frac{(ix)^6}{6!} + \frac{(ix)^7}{7!} + \dots$ un pārkārtojot saskaitāmos, iegūst

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{i^2x^2}{2!} + \frac{i^3x^3}{3!} + \frac{i^4x^4}{4!} + \frac{i^5x^5}{5!} + \frac{i^6x^6}{6!} + \frac{i^7x^7}{7!} + \dots = 1 + ix + \frac{-x^2}{2!} + \frac{-ix^3}{3!} + \frac{1x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} + \frac{-1x^6}{6!} + \frac{-ix^7}{7!} + \dots =$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\right) = \cos x + i\sin x.$$

Tādējādi katru komplekso skaitli $z \neq 0$ var uzrakstīt eksponentformā $z = a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r\,\mathrm{cis}\varphi = re^{i\varphi}$, kur r ir kompleksā skaitļa modulis, bet φ ir **viena** (jebkura) no argumenta vērtībām. Šeit visas argumenta vērtības tiks uzrakstītas tā, lai tās apmierina nosacījumu $0 \leqslant \arg z < 2\pi$, bet reizēm izteiksmju vienkāršošanai ir izdevīgi izmantot arī negatīvos argumentus.

Eilers aprēķināja, ka $e^{i\pi} = \mathrm{cis}\pi = \cos\pi + i\sin\pi = -1 + 0 \cdot i$, un tiek iegūta formula, kas apvieno pierakstā piecas matemātiskās konstantes (0 – saskaitīšanas pamatkonstante, 1 – reizināšanas pamatkonstante, e – matemātiskās analīzes pamatkonstante, π – ģeometrijas pamatkonstante, i – komplekso skaitļu pamatkonstante):

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Kompleksā skaitļa pieraksts eksponentformā ir kompaktāks par pierakstu trigonometriskajā formā, tāpēc ērtāk veikt reizināšanu, dalīšanu, kāpināšanu un noteikt sakni:

1) $z_1 z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2\, e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$;
2) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \dfrac{r_1}{r_2}\, e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$;
3) $(re^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi}$;
4) $\omega_k = \sqrt[n]{re^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)}$, $k = 0, 1, \ldots, n - 1$.

1. piemērs

Komplekso skaitli $z = \dfrac{\sqrt{3}}{8} - \dfrac{1}{8}i$ uzraksti eksponentformā!

Risinājums

Aprēķina skaitļa moduli $|z| = \sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{8}\right)^2 + \left(-\dfrac{1}{8}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{4}{64}} = \dfrac{1}{4}$, arguments, ja $a = \dfrac{\sqrt{3}}{8} > 0$ un $b = -\dfrac{1}{8} < 0$, ir

$\varphi = \arg z = \mathrm{arctg}\left(-\dfrac{1}{8} : \dfrac{\sqrt{3}}{8}\right) + 2\pi = \mathrm{arctg}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) + 2\pi = \mathrm{arctg}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) + 2\pi = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi = \dfrac{11\pi}{6}$.

Tātad $z = \dfrac{\sqrt{3}}{8} - \dfrac{1}{8}i = \dfrac{1}{4}\,\mathrm{cis}\,\dfrac{11\pi}{6} = \dfrac{1}{4}\, e^{i\frac{11\pi}{6}}$.

2. piemērs

Uzraksti eksponentformā komplekso skaitli $z = \dfrac{(-\sqrt{3} + i)\left(\cos\frac{\pi}{12} - i\sin\frac{\pi}{12}\right)}{1 - i}$!

Risinājums

Vispirms eksponentformā uzraksta katru no skaitļiem $-\sqrt{3} + i$, $\cos\dfrac{\pi}{12} - i\sin\dfrac{\pi}{12}$, $1 - i$:

$-\sqrt{3} + i = 2\left(\cos\dfrac{5\pi}{6} + i\sin\dfrac{5\pi}{6}\right) = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$

$\cos\dfrac{\pi}{12} - i\sin\dfrac{\pi}{12} = \cos\left(-\dfrac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{12}\right) = \cos\left(-\dfrac{\pi}{12} + 2\pi\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{12} + 2\pi\right) =$

$= \cos\left(\dfrac{23\pi}{12}\right) + i\sin\left(\dfrac{23\pi}{12}\right) = e^{i\frac{23\pi}{12}}$.

$1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4} + 2\pi\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4} + 2\pi\right)\right) = \sqrt{2}\,\mathrm{cis}\dfrac{7\pi}{4} = \sqrt{2}\,e^{i\frac{7\pi}{4}}$.

Tagad var izpildīt darbības

$$z = \frac{(-\sqrt{3} + i)\left(\cos\frac{\pi}{12} - i\sin\frac{\pi}{12}\right)}{1 - i} = \frac{2e^{i\frac{5\pi}{6}} \cdot e^{i\frac{23\pi}{12}}}{\sqrt{2}\,e^{i\frac{7\pi}{4}}} = \sqrt{2}\,e^{i\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{23\pi}{12} - \frac{7\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}\,e^{i\pi}.$$

3. piemērs

Uzraksti eksponentformā komplekso skaitli $z = (-1 + i)^5$!

Risinājums

Uzraksta eksponentformā pakāpes bāzi un kāpina piektajā pakāpē:

$$(1 + i)^5 = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^5 = (\sqrt{2})^5 e^{i\frac{15\pi}{4}} = 4\sqrt{2}e^{i\left(2\pi + \frac{7\pi}{4}\right)} = 4\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}.$$

4. piemērs

Uzraksti eksponentformā saknes $\sqrt[4]{\sqrt{3} + i}$ visas vērtības!

Risinājums

Uzraksta eksponentformā skaitli $\sqrt{3} + i$ un pēc tam izpilda darbību.

$$\omega_k = \sqrt[4]{\sqrt{3} + i} = \sqrt[4]{2e^{i\frac{\pi}{6}}} = \sqrt[4]{2} \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{24} + \frac{2\pi k}{4}\right)} = \sqrt[4]{2} \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{4}\right)}, \text{ ja } k = 0, 1, 2, 3$$

5. piemērs

Aprēķini i^i!

Risinājums

Vispirms bāzi i pārveido eksponentformā: $i = 1 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = cis\,\frac{\pi}{2} = e^{i\frac{\pi}{2}}$ un tad aprēķina pakāpi

$$i^i = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^i = e^{i^2\frac{\pi}{2}} = e^{-\frac{\pi}{2}}.$$

6. piemērs

Aprēķini 5^i!

Risinājums

Skaitli 5 pārraksta kā pakāpi ar bāzi e: $5 = e^{\ln 5}$.

$$5^i = (e^{\ln 5})^i = e^{i\ln 5} = cis(\ln 5) = \cos(\ln 5) + i\sin(\ln 5) \approx -0{,}0386 + 0{,}999i$$

Vingrinājumi V

1. Izskaitļo!

   a) $e^{\pi i}$ b) $e^{\frac{\pi}{4}i}$ c) $e^{\frac{2\pi}{3}i}$

   d) $e^{2+i\pi}$ e) $e^{\pi e^{\frac{\pi i}{2}}}$ f) e^{i+1}

2. Pārvērt komplekso skaitli eksponentformā ($re^{i\varphi}$)!

   a) $z = 2i$ b) $z = -1 + i$ c) $z = -2{,}1$

   d) $z = \sqrt{3} + i$ e) $z = 3 - i\sqrt{3}$ f) $z = -\sqrt{2} - i\sqrt{6}$

3. Pārvērt kompleksos skaitļus $z_1 = 1 + i$ un $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$ eksponentformā ($re^{i\varphi}$) un aprēķini!

   a) $z_1 \cdot z_2$ b) $\frac{z_1}{z_2}$ c) $(z_1)^6$ d) $\sqrt[4]{z_1}$

Komplekso skaitļu lietojums pierādījumu uzdevumos un ģeometrijā

1. piemērs

Pierādi, ka $\cos 4\alpha = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1$!

Risinājums

Apskata komplekso skaitli $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$ un to izkāpina ceturtajā pakāpē pēc Muavra formulas un pēc Ņūtona binoma izvirzījuma formulas, tad pielīdzina reālās daļas.

Vispirms $z^4 = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^4 = \cos 4\alpha + i\sin 4\alpha$.

Tad binoma izvirzījums:

$$z^4 = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^4 =$$
$$= \cos^4\alpha + 4\cos^3\alpha\cdot i\sin\alpha + 6\cos^2\alpha\cdot(i\sin\alpha)^2 + 4\cos\alpha\cdot(i\sin\alpha)^3 + (i\sin\alpha)^4 =$$
$$= \cos^4\alpha + 4i\cos^3\alpha\sin\alpha - 6\cos^2\alpha\sin^2\alpha - 4i\cos\alpha\sin^3\alpha + \sin^4\alpha\,.$$

Pielīdzinot reālās daļas, iegūst $\cos 4\alpha = \cos^4\alpha - 6\cos^2\alpha\sin^2\alpha + \sin^4\alpha$, aizstāj $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$,

$$\cos 4\alpha = \cos^4\alpha - 6\cos^2\alpha(1-\cos^2\alpha) + (1-\cos^2\alpha)^2 =$$
$$= \cos^4\alpha - 6\cos^2\alpha + 6\cos^4\alpha + 1 - 2\cos^2\alpha + \cos^4\alpha =$$
$$= 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1.$$

Ja pielīdzinātu abu izteiksmju imagināro daļu, koeficientus varētu izteikt $\sin 4\alpha$ ar $\sin\alpha$.

2. piemērs

Pierādi, ka $\cos\varphi = \dfrac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$ un $\sin\varphi = \dfrac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$!

Risinājums

Uzraksta $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ un $e^{-i\varphi} = \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)$, jo eksponentforma ir patiesa jebkurai argumenta vērtībai. Tad saskaita abas vienādības

$$e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi + \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi + \cos\varphi - i\sin\varphi = 2\cos\varphi.$$

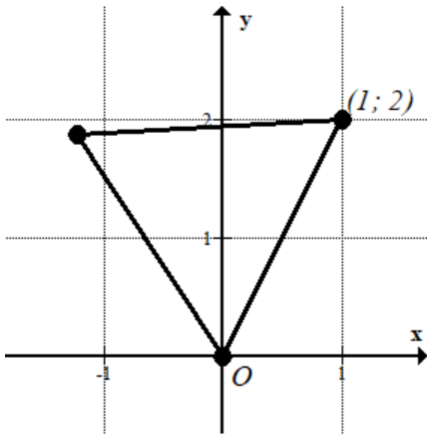
Izsaka $\cos\varphi = \dfrac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$. Lai iegūtu $\sin\varphi$ izteiksmi, no pirmās atņem otro:

$$e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi - (\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)) = \cos\varphi + i\sin\varphi - \cos\varphi + i\sin\varphi = 2i\sin\varphi.$$

Izsaka $\sin\varphi = \dfrac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$.

3. piemērs

Vienādmalu trijstūrim (skat. attēlu) viena virsotne ir koordinātu sistēmas sākumpunktā un otra ir punktā ar koordinātām $(1; 2)$. Nosaki trijstūra trešās virsotnes koordinātas.



Risinājums

Punkts ar koordinātām $(1;\ 2)$ atbilst kompleksajam skaitlim $1 + 2i$. Trešā virsotne (attēlā tā ir pa labi no dotā punkta) ir punkts, ko var iegūt, pagriežot doto punktu $(1;\ 2)$ ap koordinātu sistēmas sākumpunktu par $60°$ (pretēji pulksteņrādītāju virzienam), kas atbilst kompleksā skaitļa $1 + 2i$ reizinājumam ar $\operatorname{cis}\dfrac{\pi}{3}$.

$$(1 + 2i) \cdot \text{cis}\frac{\pi}{3} = (1 + 2i) \cdot \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = (1 + 2i)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \left(\frac{1}{2} - \sqrt{3}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)i$$

Tādēļ trešās virsotnes koordinātas ir $\left(\frac{1}{2} - \sqrt{3}; \frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)$.

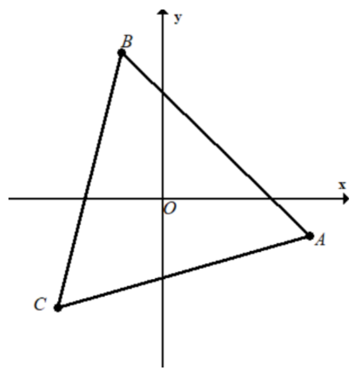
Ja būtu jāmeklē koordinātas virsotnei, kas no dotās ir pa kreisi jeb pagriezienā pulksteņrādītāja virzienā, būtu jāreizina ar $\text{cis}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$. Lai arī reizinātāja galvenā argumenta vērtība būtu $2\pi - \frac{\pi}{3}$, aprēķiniem ērtāk ir izmantot leņķi $-\frac{\pi}{3}$.

Vingrinājumi VI

1. Pierādi, ka $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$!
2. Pierādi, ka $|z|^2 = z \cdot \bar{z},\ z \in \mathbb{C}$!
3. Attēlā ir vienādmalu trijstūris ar tā centru koordinātu sistēmas sākumpunktā un vienu virsotni punktā A ar koordinātām $(-4; 1)$.

   Uzraksti dotajai virsotnei A atbilstošo komplekso skaitli!

   Nosaki koordinātas punktiem B un C!



Pielikumi

1. Kompleksā skaitļa algebriskā forma

Uzdevumi

A variants

1. Izpildi norādītās darbības!

a) $(4-3i)+(-2+i)$

b) $(6+4i)-(3-4i)$

c) $(2+3i)(6-5i)$

d) $(5-2i)^2$

e) $\frac{2-i}{1+i}$

2. Atrisini vienādojumu!

$5x^2-4x+8=0$

3. Atrisini vienādojumu, $x, y \in \mathbb{R}$!

a) $(1+i)x+(1-i)y=3-i$

b) $(x+3yi)+(1{,}5y+2xi)=4+8i$

B variants

1. Izpildi norādītās darbības!

a) $(5+6i)+(7-4i)$

b) $(3-8i)-(4+8i)$

c) $(3-2i)(1+4i)$

d) $(3-2i)^2$

e) $\frac{3+i}{1-i}$.

2. Atrisini vienādojumu!

$3x^2+4x+3=0$

3. Atrisini vienādojumu, $x, y \in \mathbb{R}$!

a) $(2-i)x+(1+i\ )y=5-i$

b) $(2-3i)x+(4+5i)y=2-14i$

Pārbaudi sevi!

(Algebriskā forma – pamatuzdevumi)

1. Nosaki pretējo skaitli dotajam kompleksajam skaitlim $z = -3 + i$!

A $z = -3 - i$ **B** $z = 3 - i$ **C** $z = -3 + i$

D $z = 3 + i$ **E** $z = 3$

2. Nosaki pretējo skaitli dotajam kompleksajam skaitlim $z = 3$!

A $z = 3$ **B** $z = -3$ **C** $z = 3 - i$

D $z = -3 + i$ **E** $z = 3 + i$

3. Nosaki pretējo skaitli dotajam kompleksajam skaitlim $z = i$!

A $z = i + 1$ **B** $z = i$ **C** $z = -i$

D $z = -1 - i$ **E** $z = 1 - i$

4. Nosaki saistīto skaitli dotajam kompleksajam skaitlim $z = -3 + i$!

A $z = 3 - i$ **B** $z = -3 - i$ **C** $z = -3 + i$

D $z = 3 + i$ **E** $z = 3 - 2i$

5. Nosaki saistīto skaitli dotajam kompleksajam skaitlim $z = 3$!

A $z = i + 3$ **B** $z = -3$ **C** $z = 3$

D $z = 3 - i$ **E** $z = -3 + i$

6. Nosaki saistīto skaitli dotajam kompleksajam skaitlim $z = i$!

A $z = i + 1$ **B** $z = i$ **C** $z = -i$

D $z = i - 1$ **E** $z = 1 - i$

7. Kompleksajam skaitlim $z = -3 + 2i$ atbilst punkts A koordinātu plaknē. Nosaki skaitli, kuram atbilstošais plaknes punkts ir simetrisks punktam A attiecībā pret reālo asi!

A $z = -3 + 2i$ **B** $z = 3 + 2i$ **C** $z = 3 - 2i$

D $z = -3 - 2i$ **E** $z = 3 - i$

8. Kompleksajam skaitlim $z = -3 + 2i$ atbilst punkts A koordinātu plaknē. Nosaki skaitli, kuram atbilstošais plaknes punkts ir simetrisks punktam A attiecībā pret imagināro asi!

A $z = -3 + 2i$ **B** $z = 3 + 2i$ **C** $z = 3 - 2i$

D $z = -3 - 2i$ **E** $z = 3 - i$

9. Kompleksajam skaitlim $z = -3 + 2i$ atbilst punkts A koordinātu plaknē. Nosaki skaitli, kuram atbilstošais plaknes punkts ir simetrisks punktam A attiecībā pret koordinātu sistēmas sākumpunktu!

A $z = -3 + 2i$ **B** $z = 3 - 2i$ **C** $z = 3 + 2i$

D $z = -3 - 2i$ **E** $z = 3 - i$

10. Nosaki reālos skaitļus x un y, ja zināms, ka $-2 + 5ix - 3iy = 9i + 2x - 4y$!

A $x = 3$, $y = 9$ **B** $x = -3$, $y = 2$ **C** $x = 1$, $y = 4$

D $x = 3$, $y = 2$ **E** $x = -1$, $y = -4$

11. Nosaki reālos skaitļus x un y, ja zināms, ka $\frac{1}{x} - 4iy = 4$!

A $x = 0$, $y = \frac{1}{4}$ **B** $x = 1$, $y = 1$ **C** $x = 0{,}25$, $y = 0$

D $x = -\frac{1}{4}$, $y = 0$ **E** $x = 0$, $y = -\frac{1}{4}$

12. Nosaki reālos skaitļus x un y, ja zināms, ka $5x - 2y + (x + y)i = 4 + 5i$!

A $x = -2$, $y = 5$ **B** $x = 2$, $y = -3$ **C** $x = 4$, $y = 5$

D $x = 2$, $y = 3$ **E** $x = -2$, $y = 3$

13. Nosaki reālos skaitļus x un y, ja zināms, ka $x^2 - 5(x - 1) + 4i = iy - 1$!

A $\begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$ **B** $\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$ $\begin{cases} x = -3 \\ y = 4 \end{cases}$ **C** $\begin{cases} x = -2 \\ y = 4 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$

D $\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$ **E** $\begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 5 \\ y = 4 \end{cases}$

14. Nosaki moduli kompleksajam skaitlim $z = i$!

A -1 **B** 2 **C** $\sqrt{2}$

D i **E** 1

15. Nosaki moduli kompleksajam skaitlim $z = -5i$!

A -5 **B** 0 **C** $\sqrt{5}$

D 5 **E** $-5i$

16. Nosaki moduli kompleksajam skaitlim $z = 1 + i$!

A 2 **B** $\sqrt{2}$ **C** 0

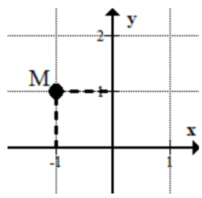
D $-\sqrt{2}$ **E** $1 + i$

17. Nosaki moduli kompleksajam skaitlim $z = 2 - 2i$!

A 4 **B** $2\sqrt{2}$ **C** 0

D 8 **E** $2 - 2i$

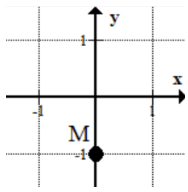
18. Nosaki punktam M atbilstošo komplekso skaitli!



A $z = -1 + i$ **B** $z = 1 - i$ **C** $z = 1 + i$

D $z = -1 - i$ **E** $z = i$

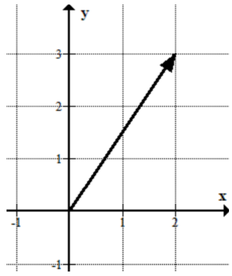
19. Nosaki punktam M atbilstošo komplekso skaitli!

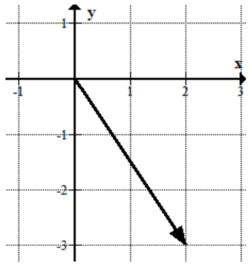


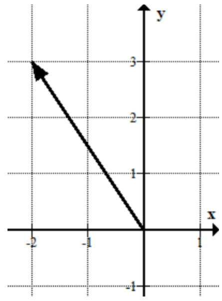
A $z = i$ **B** $z = 1 - i$ **C** $z = 0$

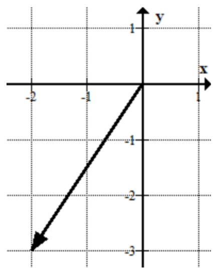
D $z = -i$ **E** $z = 1 + i$

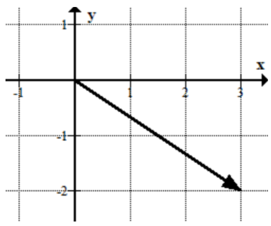
20. Nosaki, kurā zīmējumā ir attēlots kompleksajam skaitlim $z = 2 - 3i$ atbilstošais rādiusvektors!

A


B


C


D


E


21. Aprēķini: $(4 + 2i) + (1 + 5i)$!

A $4 + 10i$ **B** $4 - 10i$ **C** $5 + 7i$
D $5 - 7i$ **E** $12i$

22. Aprēķini: $(3 + 5i) - (6 + 3i)$!

A $-3 + 8i$ **B** $-3 + 2i$ **C** -1
D $-1 + i$ **E** $3 - 2i$

23. Aprēķini: i^{16}!

A -1 **B** i **C** $-i$
D 1 **E** 2

24. Aprēķini: i^{25}!

A -1 **B** i **C** $-i$
D 1 **E** 2

25. Aprēķini: $2i \cdot 3i$!

A i^2 **B** $-6i$ **C** $6i$
D 6 **E** -6

26. Aprēķini: $(2 - 3i)(2 + 3i)$!

A $4 - 9i$ **B** -5 **C** 13
D $4 + 9i$ **E** $-4 + 9i^2$

27. Aprēķini: $(5 - 4i)(3 + 2i)$!

A $15 - 8i$ **B** $23 + 2i$ **C** $-7 + 2i$
D $7 - 2i$ **E** $23 - 2i$

28. Aprēķini: $\frac{2}{3i}$!

A $\frac{2}{3}i$ **B** $2i$ **C** $\frac{4}{9}i$
D $-\frac{2}{3}i$ **E** $\frac{2}{3i^2}$

29. Aprēķini: $\frac{1}{1+i}$!

A $\frac{1}{2}$ **B** $1-i$ **C** $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$

D $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$ **E** $1+i$

30. Aprēķini: $\frac{1+i}{1-i}$!

A 1 **B** -1 **C** i

D $-i$ **E** $2-i$

31. Aprēķini: $\frac{2-3i}{4+5i}$!

A $\frac{2}{9}-\frac{3}{9}i$ **B** $-\frac{7}{41}-\frac{22}{41}i$ **C** $\frac{7}{41}+\frac{22}{41}i$

D $-\frac{7}{41}+\frac{22}{41}i$ **E** $\frac{2}{4}-\frac{3}{5}i$

32. Aprēķini: $(1+i)^8$!

A 16 **B** -16 **C** $4i$

D $-4i$ **E** $16i$

33. Aprēķini: $(1+i)^{-2}$!

A $2-2i$ **B** $-2i$ **C** $\frac{1}{2}i$

D $-\frac{1}{2}i$ **E** $(1+i)^2$

34. Aprēķini kompleksā skaitļa $z = 2 + i$ apgriezto skaitli!

A $2+i$ **B** $2-i$ **C** $\frac{2}{5}+\frac{1}{5}i$

D $\frac{-2+i}{5}$ **E** $\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i$

35. Sadali reizinātājos: $m^2 + n^2$!

A $(m+n)\,(m-n)$ **B** $(m+n)^2$ **C** $(m-n)^2$

D $(m+in)\,(m-in)$ **E** $(m+in)\,(n+im)$

36. Sadali reizinātājos: $m + n$!

A $\left(\sqrt{m}+\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{m}-\sqrt{n}\right)$ **B** $\left(\sqrt{m}+\sqrt{n}\right)^2$ **C** $\left(\sqrt{m}-\sqrt{n}\right)^2$

D $\left(\sqrt{m}+i\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{m}-i\sqrt{n}\right)$ **E** $\left(\sqrt{m}+i\sqrt{n}\right)\left(n+im\right)$

37. Sadali reizinātājos: $1+\sin^2\alpha$!

A $(1+\sin\alpha)(1-\sin\alpha)$ **B** $(1+i\sin\alpha)(1-i\sin\alpha)$ **C** $(1+\sin\alpha)^2$

D $(1-\sin\alpha)^2$ **E** $(i+\sin\alpha)(i-\sin\alpha)$

38. Atrisini vienādojumu: $z^2+3=0$!

A $\pm\sqrt{3}$ **B** $\sqrt{3}i$ **C** $\pm\sqrt{3}i$

D $i\pm\sqrt{3}$ **E** $\sqrt{3}+i$

39. Atrisini vienādojumu: $z^2-2z+4=0$!

A Atrisinājuma nav **B** $2\pm2\sqrt{3}i$ **C** $-1\pm\sqrt{3}i$

D $1\pm\sqrt{3}i$ **E** -12

2. Polinoma kompleksās saknes

Uzdevumi

A variants

1. Sadali reizinātājos!

   a) $a^2 + 9$

   b) $36a^2 + 49b^2$

2. Sastādi kvadrātvienādojumu ar reāliem koeficientiem, ja $z_1 = 2 - i$ ir viena tā sakne!

B variants

1. Sadali reizinātājos!

   a) $a^2 + 16$

   b) $9a^2 + 25b^2$

2. Sastādi kvadrātvienādojumu ar reāliem koeficientiem, ja $z_1 = 3 + i$ ir viena tā sakne!

3. Kompleksā skaitļa trigonometriskā forma

Uzdevumi

A variants

1. Pārveido algebriskā formā doto komplekso skaitli!
   a) $z = 3(\cos 0 + i\sin 0)$
   b) $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$
2. Pārveido dotos kompleksos skaitļus trigonometriskā formā!
   a) 4 b) -1
   c) $3i$ d) $-2i$
   e) $\sqrt{3} + i$ f) $\sqrt{3} - i$
3. Ir zināms, ka $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ un $z_2 = \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$.

   Aprēķini!
   a) $z_1 \cdot z_2$ b) $\frac{z_1}{z_2}$
   c) ${z_1}^3$
4. Aprēķini visas $\sqrt[3]{8}$ vērtības un attēlo kompleksajā plaknē!
5. Pieraksti trigonometriskā formā kuba sakni no i! Atrisini vienādojumu $((1 + i)z)^3 - i = 0$, izsakot savas atbildes algebriskā formā (formā $a + bi$)!

B variants

1. Pārveido algebriskā formā doto komplekso skaitli!
   a) $z = 5(\cos \pi + i\sin \pi)$
   b) $z = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$
2. Pārveido dotos kompleksos skaitļus trigonometriskā formā!
   a) 2 b) -3
   c) $4i$ d) $-3i$
   e) $1 + \sqrt{3}i$ f) $-1 - i$
3. Ir zināms, ka $z_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$ un $z_2 = 0{,}5\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

   Aprēķini!
   a) $z_1 \cdot z_2$ b) $\frac{z_1}{z_2}$
   c) ${z_1}^3$
4. Aprēķini visas $\sqrt[3]{-8}$ vērtības un attēlo kompleksajā plaknē!
5. Pieraksti trigonometriskā formā kuba sakni no (-1)! Atrisini vienādojumu $((1 + i)z)^3 + 1 = 0$, izsakot savas atbildes algebriskā formā (formā $a + bi$)!

Pārbaudi sevi!

(Trigonometriskā forma – pamatjautājumi)

1. Nosaki kompleksā skaitļa $z = -3i$ argumenta galveno vērtību!

A 0 **B** π **C** $\frac{3\pi}{2}$

D $\frac{\pi}{2}$ **E** 2π

2. Nosaki kompleksā skaitļa $z = -\sqrt{3} + i$ argumenta galveno vērtību!

A $\frac{-5\pi}{6}$ **B** $\frac{\pi}{6}$ **C** $\pi + \frac{\pi}{6}$

D $\frac{5\pi}{6}$ **E** $\frac{-\pi}{6}$

3. Nosaki kompleksā skaitļa $z = \sqrt{3} - i$ argumenta visas vērtības!

A $\frac{-5\pi}{6} + 2\pi n;$ $n \in \mathbb{Z}$ **B** $\frac{\pi}{6} + 2\pi n;$ $n \in \mathbb{Z}$ **C** $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n;$ $n \in \mathbb{Z}$

D $\frac{11\pi}{6} + 2\pi n;$ $n \in \mathbb{Z}$ **E** $\frac{-\pi}{3} + 2\pi n;$ $n \in \mathbb{Z}$

4. Nosaki negatīva skaitļa argumenta galveno vērtību!

A 0 **B** π **C** $\frac{\pi}{2}$

D $\frac{3\pi}{2}$ **E** nevar noteikt

5. Nosaki pozitīva skaitļa argumenta galveno vērtību!

A 0 **B** π **C** $\frac{\pi}{2}$

D $\frac{3\pi}{2}$ **E** nevar noteikt

6. Nosaki imagināra skaitļa argumenta galveno vērtību!

A $\frac{\pi}{2}$ **B** $\frac{3\pi}{2}$ **C** $-\frac{\pi}{2}$

D $-\frac{3\pi}{2}$ **E** pietrūkst informācijas, lai noteiktu

7. Nosaki kompleksā skaitļa $z = 0$ argumenta galveno vērtību!

A 0 **B** π **C** $\frac{\pi}{2}$

D $\frac{3\pi}{2}$ **E** nevar noteikt

8. Kompleksā skaitļa $a + bi$ galvenā argumenta vērtība ir φ. Nosaki kompleksā skaitļa $a - bi$ galvenā argumenta vērtību!

A $-\varphi$ **B** $2\pi - \varphi$ **C** 2φ

D $\pi + \varphi$ **E** $\pi - \varphi$

9. Nosaki koordinātu plaknes visu to punktu kopu, kas atbilst kompleksajiem skaitļiem ar moduli 2!

A taisne **B** riņķa līnija **C** pusplakne
D stars **E** nogrieznis

10. Nosaki koordinātu plaknes visu to punktu kopu, kas atbilst kompleksajiem skaitļiem ar argumentu $\frac{3\pi}{4}$!

A taisne **B** riņķa līnija **C** pusplakne
D stars **E** nogrieznis

11. Komplekso skaitli $z = 2$ pārveido trigonometriskā formā!

A $2cis\ 0$ **B** 2 **C** $-2cis\ 0$
D $cis\ \pi$ **E** $\cos\pi - i\sin\pi$

12. Komplekso skaitli $z = 6i$ pārveido trigonometriskā formā!

A 6 **B** $-6cis\left(\frac{\pi}{2}\right)$ **C** $6cis\left(\frac{3\pi}{2}\right)$
D $6cis\left(\frac{\pi}{2}\right)$ **E** $6cis\ (\pi)$

13. Komplekso skaitli $z = -2 + 2\sqrt{3}i$ pārveido trigonometriskā formā!

A 4 **B** $4cis\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ **C** $cis\left(\frac{2\pi}{3}\right)$
D $4cis\left(\frac{\pi}{3}\right)$ **E** $4cis\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

14. Komplekso skaitli $z = 2 - 2i$ pārveido trigonometriskā formā!

A $2\sqrt{2}$ **B** $cis\left(\frac{7\pi}{4}\right)$ **C** $2\sqrt{2}cis\left(\frac{7\pi}{4}\right)$
D $2cis\left(\frac{5\pi}{4}\right)$ **E** $cis\left(\frac{\pi}{4}\right)$

15. Komplekso skaitli $z = -\sqrt{3} - i$ pārveido trigonometriskā formā!

A 2 **B** $cis\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ **C** $2cis\left(\frac{7\pi}{6}\right)$
D $2cis\left(\frac{\pi}{6}\right)$ **E** $2cis\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

16. Izsaki komplekso skaitli $z = 2cis(2\pi) = 2(\cos(2\pi) + i\sin(2\pi))$ algebriskā formā!

A $\sqrt{3}$ **B** -1 **C** -2
D 2 **E** 1

17. Izsaki komplekso skaitli $z = \sqrt{2}cis\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ algebriskā formā!

A $\sqrt{2}$ **B** $1 + i$ **C** $-1 - i$
D $1 - i$ **E** $-1 + i$

18. Aprēķini: $2cis\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot 3cis\left(\frac{\pi}{12}\right)$!

A $cis\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ **B** $cis\left(\frac{\pi}{4}\right)$ **C** $6cis\ (\pi)$
D $6cis\left(\frac{\pi}{4}\right)$ **E** $6cis\left(\frac{-\pi}{4}\right)$

19. Aprēķini: $10cis\left(\frac{3\pi}{4}\right) : 2cis\left(\frac{\pi}{4}\right)$!

A $5cis\left(\frac{\pi}{2}\right)$

B $5cis\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

C $cis\left(\frac{\pi}{2}\right)$

D $cis\left(\frac{\pi}{4}\right)$

E $5cis\,(\pi)$

20. Aprēķini: $\left(cis\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^6$!

A $\cos\pi - i\sin\pi$

B $cis\,\pi$

C $6cis\left(\frac{\pi}{6}\right)$

D $cis\left(\frac{\pi}{2}\right)$

E $cis\,(36\pi)$

21. Aprēķini: $\sqrt{i}$!

A $\sqrt{2}\,cis\,(0)$; $\sqrt{2}\,cis\,(\pi)$

B $2cis\left(\frac{\pi}{4}\right)$; $2cis\left(\frac{5\pi}{4}\right)$

C $cis\left(\frac{\pi}{4}\right)$; $cis\left(\frac{5\pi}{4}\right)$

D $cis\left(-\frac{\pi}{4}\right)$; $cis\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

E $cis\,(0)$; $cis\,(\pi)$

22. Aprēķini $\sqrt[3]{1}$ komplekso skaitļu kopā!

A $cis\,(2\pi)$; $cis\,(3\pi)$; $cis\,(4\pi)$

B $cis\,(0)$; $cis\left(\frac{2\pi}{3}\right)$; $cis\left(\frac{4\pi}{3}\right)$

C $cis\,(\pi)$; $cis\,(3\pi)$; $cis\,(5\pi)$

D $2cis\,(0)$; $2cis\left(\frac{2\pi}{3}\right)$; $2cis\left(\frac{4\pi}{3}\right)$

E 1

Pārbaudi sevi!

Atļauts lietot kalkulatoru.

1. Pārraksti komplekso skaitli $16 - 4i$ trigonometriskā formā!

A. $4\sqrt{15}\ cis14°$ **B.** $4\sqrt{15}\ cis346°$ **C.** $4\sqrt{17}\ cis346°$

D. $4\sqrt{17}\ cis194°$ **E.** Neviena no dotajām

2. Sareizini: $(5(\cos 15° + i\sin 15°)) \cdot (12(\cos 23° + i\sin 23°))$!

A. $60\ cis345°$ **B.** $60\ cis38°$ **C.** $17\ cis38°$

D. $17\ cis345°$ **E.** Neviena no dotajām

3. Uzraksti algebriskā formā: $10\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$!

A. $5\sqrt{3} + 5i$ **B.** $10\sqrt{3}i$ **C.** $5 + 5\sqrt{3}\ i$

D. $-5 + 5\sqrt{3}\ i$ **E.** Neviena no dotajām

4. Pārraksti komplekso skaitli $-4i$ trigonometriskā formā!

A. $4\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$ **B.** $4(\cos\pi + i\sin\pi)$ **C.** $4\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

D. $4(\cos 0 + i\sin 0)$ **E.** Neviena no dotajām

5. Lietojot Muavra teorēmu, aprēķini: $(3 + 3i)^8$!

A. $104\,976$ **B.** $6\,561$ **C.** 16

D. $6\,561 + 6\,561i$ **E.** Neviena no dotajām

6. Nosaki: $\sqrt{64\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)}$!

A. $8\ cis\frac{\pi}{3};\ \ 8\ cis\frac{2\pi}{3}$ **B.** $8\ cis\frac{\pi}{6};\ \ 8\ cis\frac{7\pi}{6}$ **C.** $8\ cis\frac{\pi}{3};\ \ 8\ cis\frac{\pi}{6}$

D. $4\sqrt{2} + 4\sqrt{3}\ i;\ \ 4\sqrt{2} - 4\sqrt{3}\ i$ **E.** Neviena no dotajām

7. Nosaki visus atrisinājumus: $x^2 - 4i = 0$!

A. $\sqrt{2} - \sqrt{2}\ i;\ \ \sqrt{2} + \sqrt{2}\ i$ **B.** $2 + i;\ \ -2 - i$ **C.** $2 + i;\ \ 2 - i$

D. $-\sqrt{2} - \sqrt{2}\ i;\ \ \sqrt{2} + \sqrt{2}\ i$ **E.** Neviena no dotajām

8. Nosaki dalījumu: $\frac{7(\cos 75° + i\sin 75°)}{2(\cos 25° + i\sin 25°)}$!

A. $\frac{7}{2}(\cos 50° - i\sin 50°)$ **B.** $\frac{7}{2}(\cos 3° + i\sin 3°)$ **C.** $\frac{7}{2}(\cos 50° + i\sin 50°)$

D. $\frac{7}{2}(\cos 3° - i\sin 3°)$ **E.** Neviena no dotajām

9. Uzraksti trigonometriskā formā: $-2 + 3i$!

A. $\sqrt{13}\ cis\ 56{,}3°$ **B.** $\sqrt{13}\ cis\ 123{,}7°$ **C.** $\sqrt{13}\ cis\ 236{,}3°$

D. $\sqrt{13}\ cis\ 303{,}7°$ **E.** Neviena no dotajām

10. Sareizini: $(5(\cos 30° + i\sin 30°)) \cdot (7(\cos 30° + i\sin 30°))$!

A. $35\ cis\ 60°$ **B.** $35\ cis\ 30°$ **C.** $35\ cis\ 900°$

D. $12\ cis\ 30°$ **E.** Neviena no dotajām

11. Nosaki: $(-2+2i)^8$!

A. $-2\,896{,}3+2\,896{,}3\,i$ **B.** $-16\,i$ **C.** $4\,096\,i$

D. $4\,096$ **E.** Neviena no dotajām

12. Kurš no šiem skaitļiem nav vienādojuma $x^3-1=0$ sakne?

A. 1 **B.** $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\,i$ **C.** $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\,i$

D. $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\,i$ **E.** Visi minētie skaitļi ir vienādojuma saknes

13. Aprēķini: $(3(\cos 120°+i\sin 120°))^5$!

A. $\frac{-243}{2}-\frac{243\sqrt{3}}{2}\,i$ **B.** $\frac{-243}{2}+\frac{243\sqrt{3}}{2}\,i$ **C.** $\frac{243}{2}+\frac{243\sqrt{3}}{2}\,i$

D. $\frac{243}{2}-\frac{243\sqrt{3}}{2}\,i$ **E.** Neviena no dotajām

4. Kompleksā skaitļa ģeometriskā interpretācija

Uzdevumi

A variants

Attēlo komplekso skaitļu plaknē punktu z kopu, kuri apmierina doto nosacījumu!

a) $|z|=3$ **b)** $\arg z=\frac{\pi}{3}$

c) $|z|\leqslant 2$ **d)** $|z|>1$

e) $|z-i|\leqslant 2$

B variants

Attēlo komplekso skaitļu plaknē punktu z kopu, kuri apmierina doto nosacījumu!

a) $|z|=2$ **b)** $\arg z=\frac{\pi}{4}$

c) $|z|<3$ **d)** $|z|\geqslant 1$

e) $|z-1|\geqslant 3$

5. Pārskata uzdevumi

A variants

1. Nosaki skaitļa $\frac{4-8i}{1+3i}$ moduli un argumentu!
2. Izsaki $z = \sqrt{5} - i$ trigonometriskajā formā!
3. Izmantojot Muavra teorēmu, aprēķini $(z_1 \cdot z_2)^{12}$ ja $z_1 = \cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}$ un $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$!
4. Atrisini vienādojumu $z^3 = -1 + i$!
5. Atrisini vienādojumu komplekso skaitļu kopā: $|z| + z = 2 + i$!
6. Attēlo kompleksā plaknē visu punktu kopu, kas apmierina dotos nosacījumus!
   $\begin{cases} 1 \leqslant |z + 1 + i| \leqslant 3 \\ 0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 2 \end{cases}; (z \in \mathbb{C})$
7. Uzraksti viszemākās pakāpes vienādojumu ar reāliem koeficientiem, ja tā saknes ir 2 un $3 - 2i$!

B variants

1. Nosaki skaitļa $\frac{3-9i}{1+2i}$ moduli un argumentu!
2. Izsaki $z = \sqrt{5} - 2i$ trigonometriskajā formā!
3. Izmantojot Muavra teorēmu, aprēķini $(z_1 \cdot z_2)^{10}$ ja $z_1 = \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}$ un $z_2 = -1 + i\sqrt{3}$!
4. Atrisini vienādojumu $z^3 = -2 + 2i$!
5. Atrisini vienādojumu komplekso skaitļu kopā: $|z|\, i + z = 2 + i$!
6. Attēlo kompleksā plaknē visu punktu kopu, kas apmierina dotos nosacījumus!
   $\begin{cases} 1 \leqslant |z + 1 - i| \leqslant 3 \\ 0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 1 \end{cases}; (z \in \mathbb{C})$
7. Uzraksti viszemākās pakāpes vienādojumu ar reāliem koeficientiem, ja tā saknes ir 2 un $1 + 2i$!

6. Pārbaudes darba piemērs

1. variants

1. Nosaki skaitļa $\frac{8+2i}{5-3i}$ moduli un argumentu!

2. Aprēķini!

a) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^{10}$ **b)** $z_1 \cdot z_2$, ja $z_1 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ z_2 = \sqrt{3}\,cis\left(\frac{\pi}{8}\right)$

3. Aprēķini visas saknes!

a) $\sqrt[3]{8(\cos\pi + i\sin\pi)}$ un attēlo saknes kompleksajā plaknē **b)** $\sqrt[4]{-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i}$

4. Atrisini vienādojumu!

a) $2x^2+2x+5=0$ **b)** $(1+2i)x+(3-5i)y=1-3i,\ x;y\in\mathbb{R}$

5. Attēlo kompleksā plaknē visu punktu kopu, kas apmierina dotos nosacījumus!

a) $\arg z = \frac{5\pi}{4}$ **b)** $|z-2-i|<3$ **c)** $\begin{cases} 2 \leqslant |z| \leqslant 4 \\ 0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant \sqrt{2} \end{cases}$

6. Ir zināms, ka $z_1 = 3+i$ ir vienādojuma $z^3-3z^2-8z+30=0$ sakne. Nosaki pārējās vienādojuma saknes!

2. variants

1. Nosaki skaitļa $\frac{5+i}{2+3i}$ moduli un argumentu!

2. Aprēķini!

a) $\left(\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)\right)^{15}$ **b)** $z_1 \cdot z_2$, ja $z_1 = -1+i\sqrt{3},\ z_2 = \sqrt{3}\,cis\left(\frac{\pi}{8}\right)$

3. Aprēķini visas saknes!

a) $\sqrt[4]{16(\cos\pi + i\sin\pi)}$ un attēlo saknes kompleksajā plaknē **b)** $\sqrt[3]{6-6\sqrt{3}i}$

4. Atrisini vienādojumu!

a) $5x^2-4x+4=0$ **b)** $(2-7i)x+(8+6i)y=5i-6x-8,\ x;y\in\mathbb{R}$

5. Attēlo kompleksā plaknē visu punktu kopu, kas apmierina dotos nosacījumus!

a) $\arg z = \frac{2\pi}{3}$ **b)** $|z-1-2i|>3$ **c)** $\begin{cases} 1 \leqslant |z| \leqslant 2 \\ 0 \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant \sqrt{3} \end{cases}$

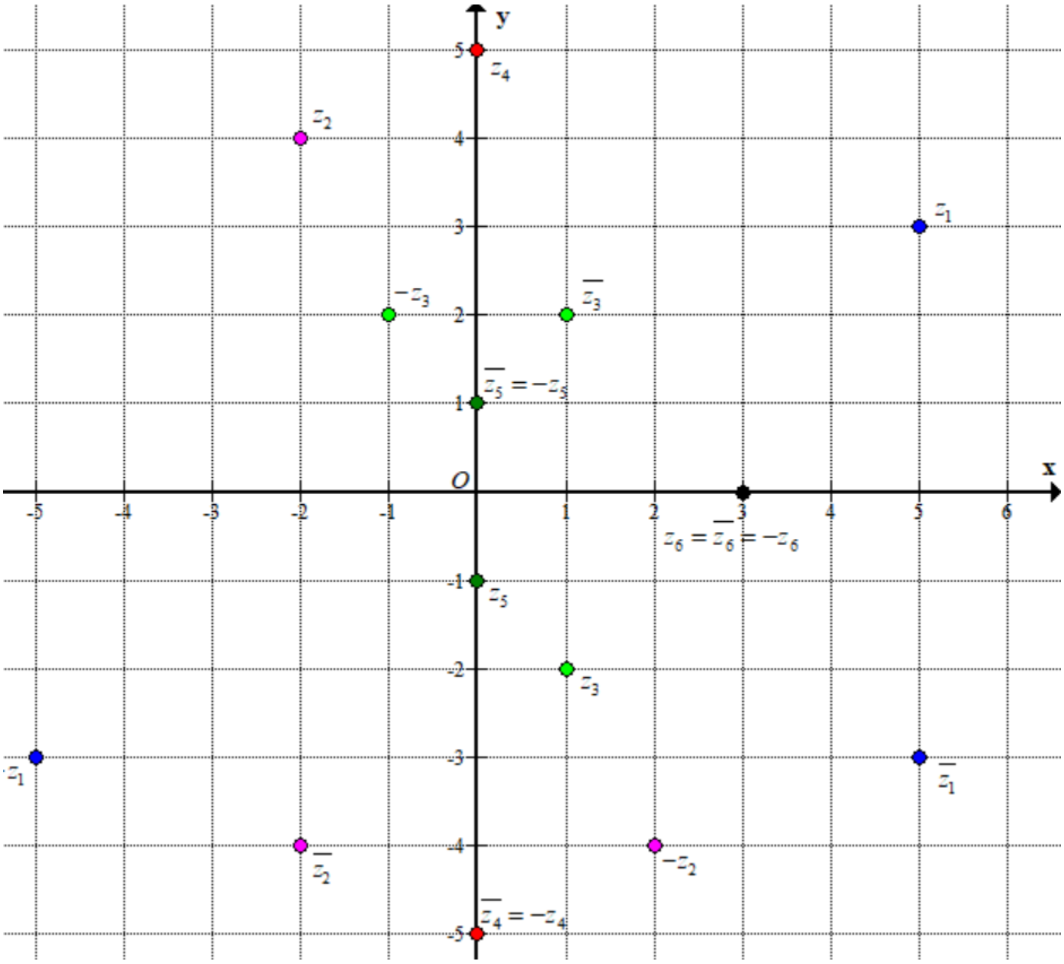
6. Ir zināms, ka $z_1 = 1-2i$ ir vienādojuma $z^3+z+10=0$ sakne. Nosaki pārējās vienādojuma saknes!

7. Uzdevumu atbildes.

Vingrinājumi I

1. **a)** $\begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x = -4 \\ y = 10 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x = 16 \\ y = -11 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x = 12 \\ y = 2 \end{cases}$

2.



3. **a)** 10 **b)** 3 **c)** $1{,}25$ **d)** 1 **e)** 2 **e)** $\sqrt{2}$

4. **a)** $6 + 28i$ **b)** $-5 - 6i$ **c)** $11 + 9i$ **d)** $-8 + 23i$ **e)** $4a - 3bi$

5. **a)** $-13 + 13i$ **b)** $38 + 9i$ **c)** $22{,}5 - 14i$ **d)** $-1{,}5 + 2i$ **e)** $0{,}4 + 1{,}9i$ **f)** $7mn + (5m^2 + 6n^2)i$

6. **a)** $\frac{7}{5} - \frac{1}{5}i$ **b)** $\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$ **c)** $-\frac{4}{5} - \frac{3}{5}i$ **d)** $-1{,}5 + 3i$ **e)** $-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$

8. **a)** $1 - i$ **b)** $-2 - 6i$

9. **a)** 16 **b)** $125i$ **c)** -8 **d)** $8i$ **e)** i **f)** i

10. **a)** $\pm(\sqrt{2} - \sqrt{2}i)$ **b)** $\pm\left(\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i\right)$ **c)** $\pm(1 + 4i)$ **d)** $\pm(5 - i)$

11. -1

12. $k \in \mathbb{N}$,

1) ja $n = 4k$, tad summa ir 0; **2)** ja $n = 4k - 1$, tad summa ir -1; **3)** ja $n = 4k - 2$,tad summa ir $-1 + i$;

4) ja $n = 4k - 3$, tad summa ir i.

Vingrinājumi II

1. **a)** $-1 \pm i$ **b)** $3 \pm 3i$ **c)** $1 \pm 2i$ **d)** $-3{,}5 \pm 4{,}5i$

2. **a)** $4 \pm 3i$ **b)** $-5 \pm 2i$ **c)** $6 \pm i$

3. **a)** $(z-3i)(z+3i)$ **b)** $(x-yi)(x+yi)$ **c)** $(m^2-in)(m^2+in)$ **d)** $(z-2-\sqrt{2}i)(z-2+\sqrt{2}i)$

4. z^3-2z^2+z-2

5. $z^4+3z^3+8z+24$

6. $5-2i;\ -3$

Vingrinājumi III

1. **a)** $12cis175°$ **b)** $10cis220°$ **c)** $6cis290°$ **d)** $8cis\dfrac{11\pi}{6}=4\sqrt{3}-4i$

2. **a)** $4cis20°$ **b)** $2cis30°=\sqrt{3}+i$ **c)** $2cis170°$ **d)** $cis\dfrac{3\pi}{2}=-i$

3. **a)** $6+6\sqrt{3}i$ **b)** -15 **c)** $2\sqrt{2}-2\sqrt{2}i$ **d)** $20i$ **e)** $\sqrt{2}+\sqrt{2}i$ **f)** $2i$

g) $\sqrt{3}+i$ **h)** $-2\sqrt{2}-2\sqrt{2}i$

Vingrinājumi IV

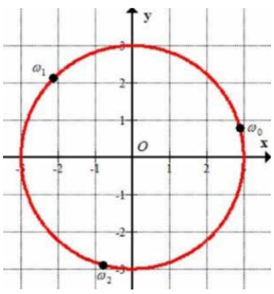
1. **a)** $8cis180°=-8$ **b)** $cis40°\approx 0{,}766+0{,}643\,i$ **c)** $9cis300°=4{,}5-4{,}5\sqrt{3}i$

d) $32cis135°=-16\sqrt{2}+16\sqrt{2}i$

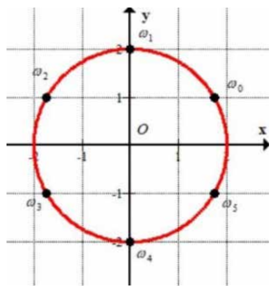
2. **a)** $18cis\dfrac{\pi}{2}=18\,i$ **b)** $8cis\dfrac{\pi}{2}=8\,i$ **c)** $cis120°=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,i$

d) $cis180°=-1$ **e)** $9cis240°=-4{,}5-4{,}5\sqrt{3}i$ **f)** $32cis240°=-16-16\sqrt{3}i$

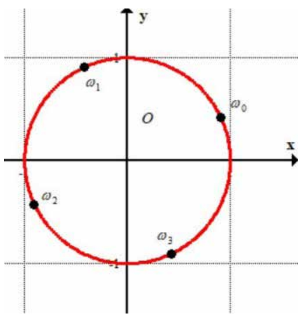
3. **a)** $3cis15°$
$3cis135°$
$3cis225°$



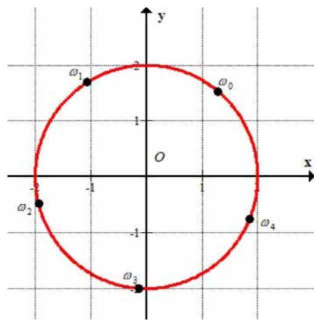
b) $2cis30°$
$2cis90°$
$2cis150°$
$2cis210°$
$2cis270°$
$2cis330°$



c) $cis25°$
$cis115°$
$cis205°$
$cis295°$



d) $2cis50°$
$2cis122°$
$2cis194°$
$2cis266°$
$2cis338°$



4. a) $2\sqrt[6]{2}\,cis\,\frac{\pi}{4}$

$2\sqrt[6]{2}\,cis\,\frac{11\pi}{12}$

$2\sqrt[6]{2}\,cis\,\frac{19\pi}{12}$

b) $\sqrt[4]{2}\,cis\,\frac{\pi}{12}$

$\sqrt[4]{2}\,cis\,\frac{7\pi}{12}$

$\sqrt[4]{2}\,cis\,\frac{13\pi}{12}$

$\sqrt[4]{2}\,cis\,\frac{19\pi}{12}$

c) $cis\,\frac{11\pi}{12}$

$cis\,\frac{23\pi}{12}$

d) $2cis\,\frac{\pi}{12}$

$2cis\,\frac{5\pi}{12}$

$2cis\,\frac{9\pi}{12} = 2cis\,\frac{3\pi}{4}$

$2cis\,\frac{13\pi}{12}$

$2cis\,\frac{17\pi}{12}$

$2cis\,\frac{21\pi}{12} = 2cis\,\frac{7\pi}{4}$

e) $cis\,\frac{\pi}{2}$

$cis\,\frac{7\pi}{6}$

$cis\,\frac{11\pi}{6}$

f) $cis\,\frac{\pi}{8}$

$cis\,\frac{5\pi}{8}$

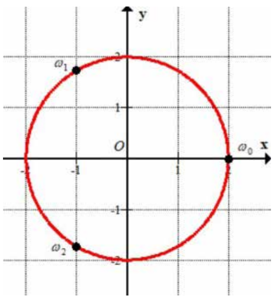
$cis\,\frac{9\pi}{8}$

$cis\,\frac{13\pi}{8}$

5. a) $2cis\,0 = 2$

$2cis\,\frac{2\pi}{3}$

$2cis\,\frac{4\pi}{3}$

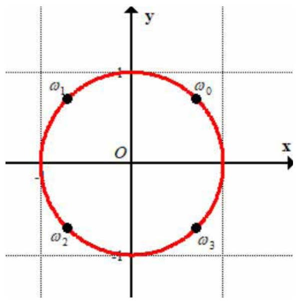


b) $cis\,\frac{\pi}{4}$

$cis\,\frac{3\pi}{4}$

$cis\,\frac{5\pi}{4}$

$cis\,\frac{7\pi}{4}$

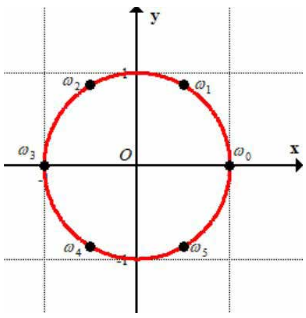


c) $cis\,0 = 1$

$cis\,\frac{\pi}{3}$

$cis\,\frac{2\pi}{3}$

$cis\,\frac{3\pi}{3} = cis\,\pi$



d) $2cis\,\frac{\pi}{6}$

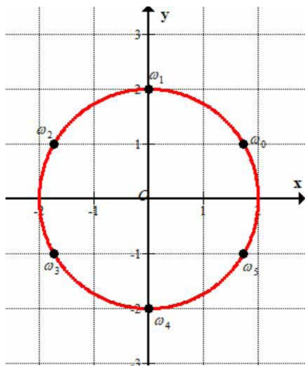
$2cis\,\frac{\pi}{2}$

$2cis\,\frac{5\pi}{6}$

$2cis\,\frac{7\pi}{6}$

$2cis\,\frac{9\pi}{6} = 2cis\,\frac{3\pi}{2}$

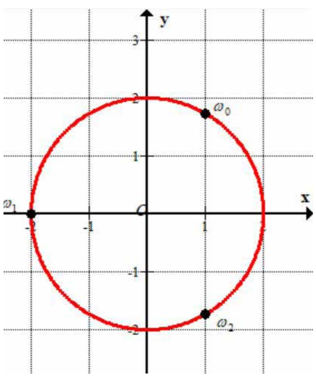
$2cis\,\frac{11\pi}{6}$



e) $2cis\,\frac{\pi}{3}$

$2cis\,\pi$

$2cis\,\frac{5\pi}{3}$

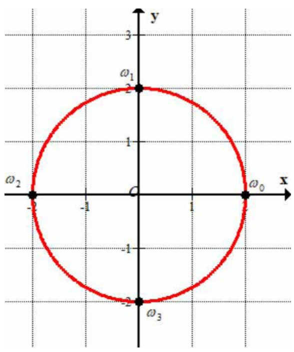


f) $2cis\,0 = 2$

$2cis\,\frac{\pi}{2}$

$2cis\,\pi$

$2cis\,\frac{3\pi}{2}$



6. $(1-i)^n = (\sqrt{2}\,cis315°)^n = (\sqrt{2})^n \cdot cis(315°\,n)$,

a) kompleksais skaitlis ir reāls skaitlis, ja imaginārās daļas koeficients ir 0 un $n = 4$,

b) imaginārs skaitlis ir tad, ja reālā daļa ir 0 un $n = 2$.

Vingrinājumi V

1. **a)** -1 **b)** $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$ **c)** $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ **d)** $-e^2$
   e) -1 **f)** $ecis1 \approx 1{,}469 + 2{,}287\ i$

2. **a)** $2e^{\frac{\pi}{2}i}$ **b)** $\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}$ **c)** $2{,}1e^{\pi i}$ **d)** $2e^{\frac{\pi}{6}i}$
   e) $2\sqrt{3}e^{\frac{11\pi}{6}i}$ **f)** $2\sqrt{2}e^{\frac{4\pi}{3}i}$

3. **a)** $2\sqrt{2}e^{\frac{23\pi}{12}i}$ **b)** $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{7\pi}{12}i}$ **c)** $8e^{\frac{3\pi}{2}i}$ **d)** $\sqrt[8]{2}\,e^{\frac{\pi}{16}i}$, $\sqrt[8]{2}\,e^{\frac{9\pi}{16}i}$, $\sqrt[8]{2}\,e^{\frac{17\pi}{16}i}$, $\sqrt[8]{2}\,e^{\frac{25\pi}{16}i}$

Vingrinājumi VI

1. $(\sin\alpha + i\cos\alpha)^3$ izkāpina pēc formulas un Muavra teorēmas, pēc tam pielīdzina imagināro daļu koeficientus.
2. Pieņem, ka $z = a + bi$ un izsaka $|z|^2$ un $z \cdot \bar{z}$.
3. Pagrieziens ap koordinātu sākumpunktu par $120° = \frac{2\pi}{3}$ un par $-120° = \frac{2\pi}{3}$. Kompleksajiem skaitļiem tas būs reizinājums ar $cis\frac{2\pi}{3}$ un $cis\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$, šis ir gadījums, kad ir ērti izmantot negatīvo leņķi. $B\left(-2+\frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{1}{2}+2\sqrt{3}\right)$, $C\left(-2-\frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{1}{2}-2\sqrt{3}\right)$.

Pielikumi

1. Kompleksā skaitļa algebriskā forma

A variants

1. **a)** $2-2i$ **b)** $3+8i$ **c)** $27+8i$
   d) $21-20i$ **e)** $\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$
2. $\frac{2 \pm 6i}{5}$
3. **a)** $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x=4-1{,}5c \\ y=c \end{cases}$; $c \in \mathbb{R}$

B variants

1. **a)** $12+2i$ **b)** $-1-16i$ **c)** $11+10i$
   d) $5-12i$ **e)** $1+2i$
2. $\frac{-2 \pm \sqrt{5}i}{5}$
3. **a)** $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$

Pārbaudi sevi!
(Algebriskā forma – pamatuzdevumi)

1	**B**	11	**C**	21	**C**	31	**B**
2	**B**	12	**D**	22	**B**	32	**A**
3	**C**	13	**D**	23	**D**	33	**D**
4	**B**	14	**E**	24	**B**	34	**E**
5	**C**	15	**D**	25	**E**	35	**D**
6	**C**	16	**B**	26	**C**	36	**D**
7	**D**	17	**B**	27	**E**	37	**B**
8	**B**	18	**A**	28	**D**	38	**C**
9	**B**	19	**D**	29	**D**	39	**D**
10	**D**	20	**B**	30	**C**		

2. Polinoma kompleksās saknes

A variants

1. a) $(a-3i)(a+3i)$

b) $(6a-7bi)(6a+7bi)$

2. $z^2-4z+5=0$

B variants

1. a) $(a-4i)(a+4i)$

b) $(3a-5bi)(3a+5bi)$

2. $z^2-6z+10=0$

3. Kompleksā skaitļa trigonometriskā forma

A variants

1. a) 3 **b)** $\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i$

2. a) $4cis0$ **b)** $cis\,\pi$ **c)** $3cis\frac{\pi}{2}$

d) $2cis\frac{3\pi}{2}$ **e)** $2cis\frac{\pi}{6}$ **f)** $2cis\frac{11\pi}{6}$

3. a) $2\sqrt{3}\,cis\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}+3i$

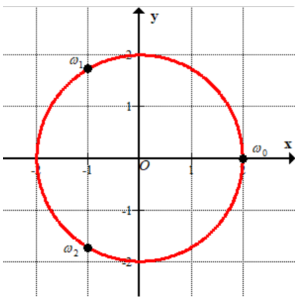
b) $\frac{2\sqrt{3}}{3}\,cis\frac{\pi}{6}=1+\frac{\sqrt{3}}{3}\,i$

c) $8cis\frac{3\pi}{4}=-4\sqrt{2}+4\sqrt{2}\,i$

4. $\omega_0=2$

$\omega_1=2cis\frac{2\pi}{3}$

$\omega_2=2\text{cis}\frac{4\pi}{3}$



5. $z_1=\frac{\sqrt{3}+1}{4}+\frac{1-\sqrt{3}}{4}\,i$

$z_2=\frac{-\sqrt{3}+1}{4}+\frac{1+\sqrt{3}}{4}\,i$

$z_3=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\,i$

B variants

1. a) -5 **b)** $\sqrt{2}+2\sqrt{3}\,i$

2. a) $2cis0$ **b)** $3cis\,\pi$ **c)** $4cis\frac{\pi}{2}$

d) $3cis\frac{3\pi}{2}$ **e)** $2cis\frac{\pi}{3}$ **f)** $\sqrt{2}\,cis\frac{5\pi}{4}$

3. a) $\frac{1}{2}\,cis\,\pi=\frac{1}{2}$

b) $2cis\frac{\pi}{3}=1+\sqrt{3}\,i$

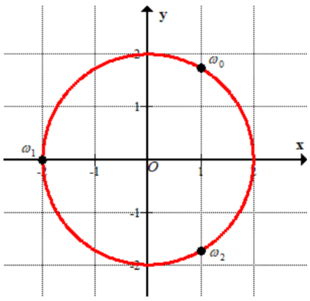
c) $cis\,0=1$

4.

$\omega_0=2cis\frac{\pi}{3}$

$\omega_1=2cis\,\pi=-2$

$\omega_2=2\text{cis}\frac{5\pi}{3}$



5. $z_1=\frac{\sqrt{3}+1}{4}+\frac{\sqrt{3}-1}{4}\,i$

$z_2=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\,i$

$z_3=\frac{-\sqrt{3}+1}{4}+\frac{-1-\sqrt{3}}{4}\,i$

Pārbaudi sevi!

(Trigonometriskā forma – pamatjautājumi)

1	**C**	7	**E**	13	**B**	19	**A**
2	**D**	8	**B**	14	**C**	20	**B**
3	**D**	9	**B**	15	**C**	21	**C**
4	**B**	10	**D**	16	**D**	22	**B**
5	**A**	11	**A**	17	**E**		
6	**E**	12	**D**	18	**D**		

Pārbaudi sevi!

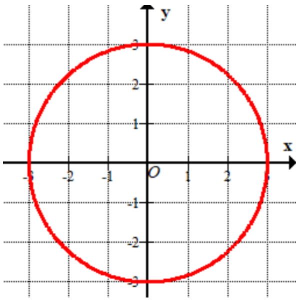
Atļauts lietot kalkulatoru.

1	**C**	5	**A**	9	**B**	13	**A**
2	**B**	6	**B**	10	**A**		
3	**D**	7	**D**	11	**D**		
4	**A**	8	**C**	12	**B**		

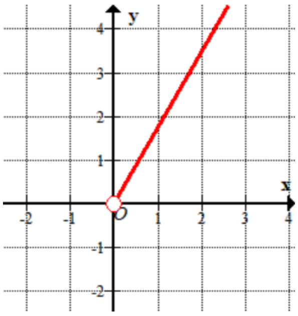
4. Kompleksā skaitļa ģeometriskā interpretācija

A variants

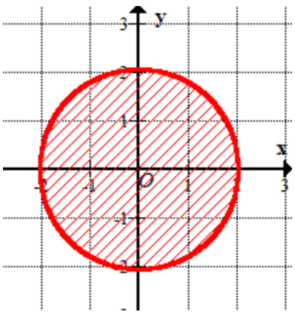
a)



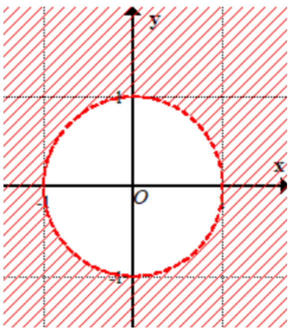
b)



c)

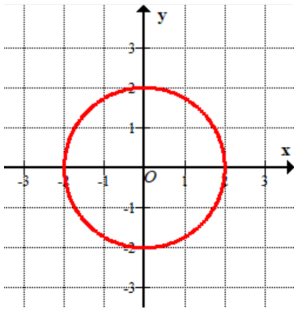


d)

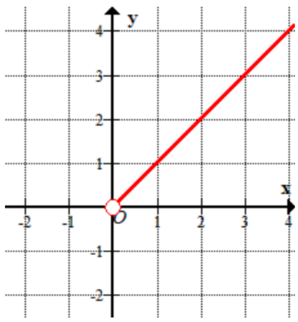


B variants

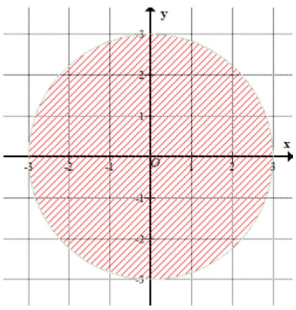
a)



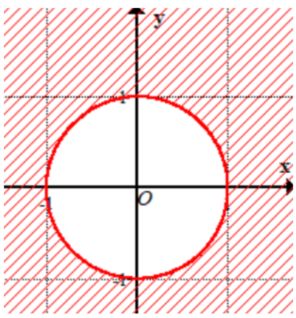
b)



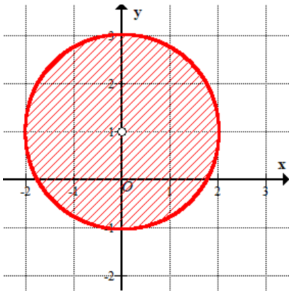
c)



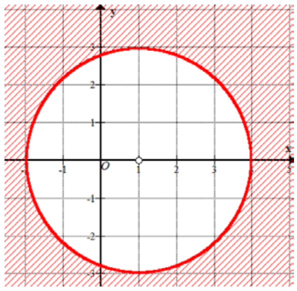
d)



e)



e)



5. Pārskata uzdevumi

A variants

1. $2\sqrt{2};\ \frac{5\pi}{4}$

2. $\sqrt{6}cis\left(2\pi - \text{arctg}\,\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \approx \sqrt{6}\ cis336°$

3. $4\,096\ i$

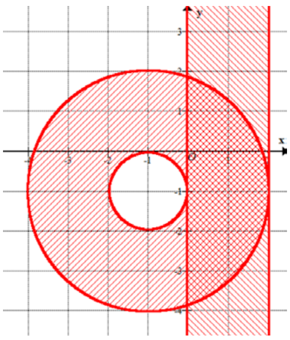
4. $\omega_0 = \sqrt[6]{2}\,\text{cis}\,\frac{\pi}{4}$

$\omega_1 = \sqrt[6]{2}\,\text{cis}\,\frac{11\pi}{12}$

$\omega_2 = \sqrt[6]{2}\,\text{cis}\,\frac{19\pi}{12}$

5. $z = \frac{3}{4} + i$

6. Atbilde ir kopējā iekrāsotā daļa.



7. $z^3 - 8z^2 + 25z - 26 = 0$

B variants

1. $3\sqrt{2};\ \frac{5\pi}{4}$

2. $3cis\left(2\pi - \text{arctg}\,\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \approx 3cis318°$

3. $-1\,024\ i$

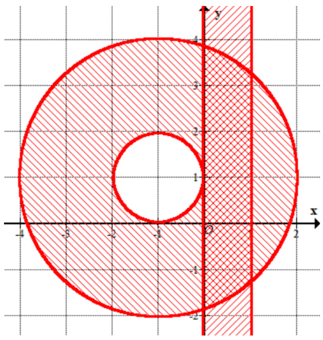
4. $\omega_0 = \sqrt{2}\,\text{cis}\,\frac{\pi}{4}$

$\omega_1 = \sqrt{2}\,\text{cis}\,\frac{11\pi}{12}$

$\omega_2 = \sqrt{2}\,\text{cis}\,\frac{19\pi}{12}$

5. $z = 2 - \frac{3}{2}i$

6. Atbilde ir kopējā iekrāsotā daļa.



7. $z^3 - z^2 + 9z - 10 = 0$

6. Pārbaudes darba piemērs

1. variants

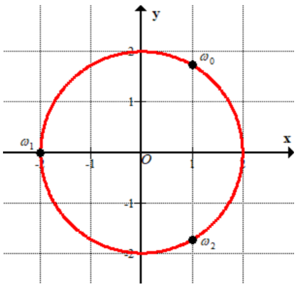
1. $\sqrt{2};\ \frac{\pi}{4}$

2. a) $\frac{1}{32}i$ **b)** $3\ cis\,\frac{47\pi}{24}$

3. a) $\omega_0 = 2cis\,\frac{\pi}{3}$

$\omega_1 = 2cis\,\pi = -2$

$\omega_2 = 2cis\,\frac{5\pi}{3}$



b) $\omega_0 = cis\,\frac{7\pi}{24}$

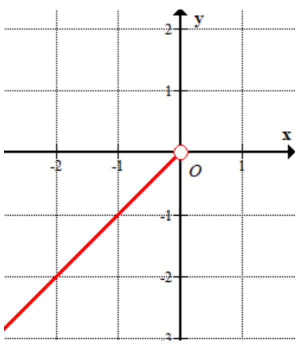
$\omega_1 = cis\,\frac{19\pi}{24}$

$\omega_2 = cis\,\frac{31\pi}{24}$

$\omega_3 = cis\,\frac{43\pi}{24}$

4. a) $\frac{-1 \pm 3i}{2}$ **b)** $\begin{cases} x = -\frac{4}{11} \\ y = \frac{5}{11} \end{cases}$

5. a)



2. variants

1. $\sqrt{2};\ \frac{7\pi}{4}$

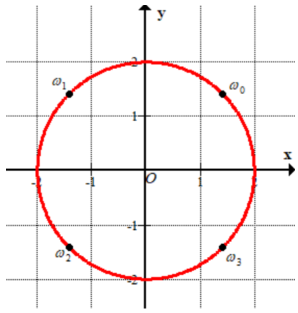
2. a) $32\ cis\,\frac{5\pi}{4}$ **b)** $2\sqrt{3}\ cis\,\frac{19\pi}{24}$

3. a) $\omega_0 = 2cis\,\frac{\pi}{4}$

$\omega_1 = 2cis\,\frac{3\pi}{4}$

$\omega_2 = 2cis\,\frac{5\pi}{4}$

$\omega_3 = 2cis\,\frac{7\pi}{4}$



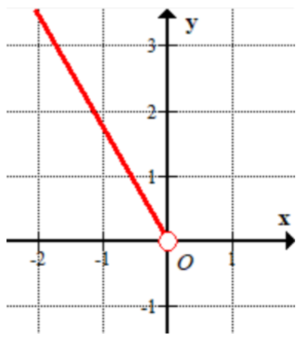
b) $\omega_0 = \sqrt[3]{12}\,cis\,\frac{5\pi}{9}$

$\omega_1 = \sqrt[3]{12}\,cis\,\frac{11\pi}{9}$

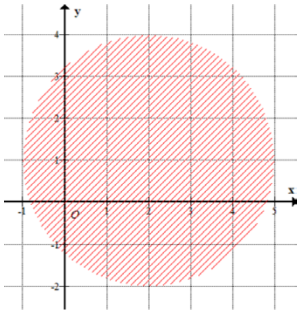
$\omega_2 = \sqrt[3]{12}\,cis\,\frac{17\pi}{9}$

4. a) $\frac{2 \pm 4i}{5}$ **b)** $\begin{cases} x = -\frac{11}{3} \\ y = -\frac{2}{13} \end{cases}$

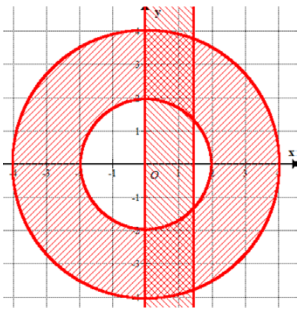
5. a)



b)

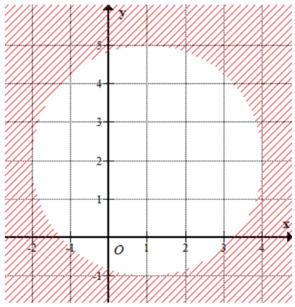


c) Atbilde ir kopīgā iekrāsotā daļa.

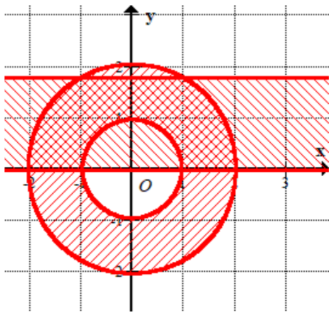


6. $3-i; -3$

b)



c) Atbilde ir kopīgā iekrāsotā daļa.



6. $1+2i; -2$

DOMAT.
DARĪT.
ZINĀT.

Valsts izglītības satura centra īstenotā projekta "Kompetenču pieeja mācību saturā" mērķis ir izstrādāt, aprobēt un pēctecīgi ieviest Latvijā tādu vispārējās izglītības saturu un pieeju mācīšanai, lai skolēni gūtu dzīvei 21. gadsimtā nepieciešamās zināšanas, prasmes un attieksmes.

Projekts Nr. 8.3.1.1/16/I/002 Kompetenču pieeja mācību saturā

Valsts izglītības satura centrs

NACIONĀLAIS ATTĪSTĪBAS PLĀNS 2020

EIROPAS SAVIENĪBA
Eiropas Sociālais fonds

IEGULDĪJUMS TAVĀ NĀKOTNĒ