Ausma Orlovska
Ingūna Jurgelāne-Kaldava

Ekonomiskā statistika

RTU Izdevniecība

1862
RĪGAS TEHNISKĀ UNIVERSITĀTE

RĪGAS TEHNISKĀ UNIVERSITĀTE
Inženierekonomikas un vadības fakultāte

Ausma Orlovska
Ingūna Jurgelāne-Kaldava

EKONOMISKĀ STATISTIKA

RTU Izdevniecība
Rīga 2024

Ausma Orlovska, Ingūna Jurgelāne-Kaldava. **Ekonomiskā statistika**. Teorija, piemēri, uzdevumi. – Rīga: RTU Izdevniecība, 2024. 174 lpp.

Mācību grāmatā apkopota teorija, piemēri, pārbaudes jautājumi un uzdevumi par tādām tēmām kā statistiskā novērošana, grupēšana, statistisko datu grafiskās attēlošanas paņēmieni, kā arī statistisko rādītāju aprēķināšanas metodes u. c. Grāmatas autoru mērķis – palīdzēt studentiem pēc iespējas veiksmīgāk apgūt zināšanas statistikā un mācēt tās praktiski izmantot gan statistikas kursos, gan ikdienas un pētniecības procesos. Statistikas zināšanas ir nepieciešamas ikvienas specialitātes studentam, jo tās palīdz izprast un interpretēt ekonomisko informāciju un analizēt dažādu nozaru un procesu tendences gan Latvijā, gan pasaulē.

Recenzents Prof. *Dr. habil. oec.* Remigijs Počs
Tehniskā palīdzība Agnese Batenko

Literārā redaktore Inga Gulbe
Datorsalikums Baiba Puriņa
Vāka dizains Paula Lore

ISBN 978-9934-37-084-7 (pdf)

© Rīgas Tehniskā universitāte, 2024
© Ausma Orlovska, Ingūna Jurgelāne-Kaldava, 2024

SATURS

1. STATISTIKAS PRIEKŠMETS UN METODES

1.1. Statistikas jēdziens

Termins “statistika” cēlies no latīņu valodas vārda *status*, kas tulkojumā nozīmē “noteikts lietu stāvoklis”. Statistikas termins ir ļoti plašs. Pašreiz to lieto trijās nozīmēs.

1. Ar statistiku saprot īpašu praktiskās darbības nozari, kura iegūst, apstrādā un analizē statistiskos datus un raksturo atsevišķu uzņēmumu, nozaru, reģionu un valsts/valstu sociālekonomisko attīstību.
2. Ar statistiku saprot zinātni, kura izstrādā statistikas praksē izmantojamus teorētiskos atzinumus un metodes.
3. Ar statistiku saprot statistiskos datus, kas uzrādīti uzņēmumu, organizāciju, nozaru pārskatos, publicēti krājumos, atspoguļoti periodikā.

Katrs no šiem statistikas jēdzieniem izsaka statistikas būtību citā aspektā. Statistika ir komplekss jēdziens, kas aptver zinātnisku metožu izveidošanas un to praktiskas lietošanas procesu. Statistikas teorija, statistikas organizācija un statistikas dati ir vienota jēdziena sastāvdaļas. Tās ir savstarpēji saistītas un cita citu papildina.

Statistikas īpatnība ir tā, ka statistiskie dati tiek apkopoti kvantitatīvā formā, t. i., statistika “runā skaitļu valodā”, atspoguļojot sabiedriskās parādības visā to daudzveidībā.

Statistiskie dati raksturo pētāmās parādības stāvokli, līmeni, tās attīstību konkrētajā laikā un vietā, kā arī kvalitatīvās pārmaiņas attīstības procesā.

Lai informācija būtu pilnīga, tad, nosaucot to vai citu statistisko rādītāju, vienmēr tiek norādīts:

- kāda parādība tiek pētīta;
- laiks un vieta, kuras robežās parādība novērota;
- kādās mērvienībās tiek izteikts parādības lielums.

Piemēram, 2022. gadā Latvijā tika reģistrētas 11,8 tūkst. laulības. Tātad pētītā parādība ir laulību reģistrācija; laiks – 2022. gads; vieta – Latvija; mērvienība – laulību skaits.

1.2. Statistikas vēsture

Statistika nav radusies pēdējos gados, tai ir sena vēture.

Saimnieciskajām un kara vajadzībām jau cilvēces vēstures senākajos periodos bija vajadzīgi dati par iedzīvotājiem, zemi, mājlopiem, iedzīvotāju mantisko stāvokli.

Ar mērķi ievākt nodokļus tika organizēta iedzīvotāju skaitīšana. To veica senajā Ķīnā, Senajā Romā, Ēģiptē un citur.

Piemēram, Ķīnā vairāk nekā divus tūkstošus gadu pirms mūsu ēras notika iedzīvotāju skaitīšana pēc dzimuma un vecuma, kā arī tika vāktas ziņas par iedzīvotāju mantisko stāvokli, lauksaimniecības un rūpniecības stāvokli. Senajā Romā notika brīvo pilsoņu un to īpašuma uzskaite (vergus neuzskaitīja). Par statistiskajiem apsekojumiem rakstīts arī Bībelē.

Ar sabiedriskās ražošanas un iekšējās un ārējās tirdzniecības attīstību pieauga arī nepieciešamība pēc statistiskās informācijas.

Jau 9. gs. beigās notika pirmās uzskaites operācijas, karaļu īpašuma inventarizācija, kā arī karadienestam derīgo iedzīvotāju uzskaite.

Kapitālisma rašanās periodā sabiedriskās ražošanas pieaugums, starptautisko attiecību un tirdzniecības paplašināšanās veicināja uzskaites un statistikas attīstību, jo palielinājās vajadzība pēc ekonomiskās situācijas analīzes. Bija nepieciešami dati par izejvielām, rūpnieciskās un lauksaimnieciskās ražošanas apjomiem un izvietojumu, preču realizācijas tirgiem, darbaspēka tirgiem.

Tas viss veicināja statistikas zinātnes veidošanos, un 17. gs. vidū tā sāka attīstīties divos virzienos – kā *aprakstošā* un *matemātiskā* statistika.

Aprakstošo statistiku sauca arī par valsts pārzināšanas skolu. Tā radās 17. gs. otrajā pusē Vācijā. Tās pārstāvji bija vācu zinātnieki G. Korings (1606—1681) un G. Abenvals (1719—1772), kas Marburgas universitātē 1746. gadā pirmoreiz sāka lasīt jaunu kursu, ko nosauca par “Statistiku”. Šī skola pastāvēja vairāk nekā 150 gadus, nemainot savus teorētiskos pamatus. Galvenais šī kursa saturs bija valsts politiskā stāvokļa un sasniegumu apraksts.

Aprakstošās skolas pārstāvji sākumā vispār izvairījās no skaitlisko datu izmantošanas. Tikai 18. gs. vidū statistiskos datus pakāpeniski ietvēra aprakstošās statistikas darbos.

Aprakstošās statistikas darbos nebija arī sabiedrisko parādību un likumsakarību analīzes.

Matemātiskās statistikas virziens izveidojās Anglijā. Matemātiskā virziena pārstāvji sev izvirzīja uzdevumu ar dažādu aprēķinu palīdzību atklāt ekonomisko parādību likumsakarības. Šī virziena galvenais pārstāvis bija V. Petijs (1623–1687).

19. gs. pirmajā pusē radās statistikas zinātnes trešais – *statistiski matemātiskais* – virziens. Galvenais tā pārstāvis ir beļģu statistiķis A. Ketlē (1796—1874), kas statistiku nosauca par “sociālo fiziku” – t. i., zinātni, kas pēta sabiedriskās sistēmas likumus ar skaitlisko metožu palīdzību.

Statistiski matemātiskā virziena pārstāvji par statistikas pamatu uzskatīja varbūtības teoriju, kas ir viena no statistikas nozarēm.

Statistikas zinātnes attīstībā lielu ieguldījumu devuši daudzu valstu zinātnieki, arī latviešu zinātnieks Kārlis Balodis (1864—1931).

1.3. Statistikas zinātnes priekšmets

Kā katrai zinātnei, arī statistikai ir būtiskas specifiskas īpatnības, kuras to atšķir no citām zinātnēm un dod tai tiesības pastāvēt kā zinātnes nozarei. Jebkuras zinātnes galvenā īpatnība izpaužas izziņas priekšmetā, izpētes principos un metodēs, kuru kopums veido tās metodoloģiju.

Statistikas pētīšanas priekšmets ir **sociālekonomiskās dzīves masveida parādības**. Tā pēta šo parādību un procesu skaitliskās (kvantitatīvās) likumsakarības konkrētos apstākļos un vietās. Statistiku atzīst par zinātni, kas pēta jebkuras masveida parādības dabā, sabiedrībā, tehnikā.

Statistikai nav raksturīga atsevišķu gadījumu, vienreizēju vai retu parādību pētīšana, neskatoties uz to, ka tie ir interesanti un svarīgi. Statistika pēta tikai tādas parādības, kuras ir sastopamas lielā skaitā, un tādas ir gandrīz visas sabiedriskās parādības. Piemēram, ražošana, sadale, patēriņš, transports, migrācija, laulības, šķiršanās, bezdarbs, noziedzība u. c.

Statistika pēta arī dabas resursus un dabas apstākļus, jo tie ietekmē sabiedrības dzīvi.

Statistika pēta sabiedriskās parādības ne vispār, bet gan to **skaitliskās izpausmes**. Ja kādu parādību nevar tieši vai netieši raksturot skaitliski, tās statistiskā pētīšana nav iespējama. Sabiedriskās parādības vienmēr ir konkrētas un reālas, tās var izteikt EUR, tonnās, cilvēkos utt. Statistika nerada parādību lielumus vai stāvokļus, bet tos konstatē un analizē.

Katrā vēsturiskajā posmā sociālekonomiskajām parādībām ir konkrēti izmēri (apjomi), struktūra, attīstības intensitāte un izplatība, kā arī konkrētas attiecības citai ar citu. Statistiskajiem rādītājiem ir jāatklāj pētāmo parādību īpatnības, likumsakarības un nemitīgi mainīgo savstarpēji saistīto cēloņu un seku kompleksi.

Statistiskās likumsakarības ir dabā un sabiedrībā objektīvi pastāvošas likumsakarības.

Masveida parādībās, kuru pamatā ir plašs un sarežģīts nemitīgi mainīgu savstarpēji saistītu cēloņu un seku komplekss, tās atsevišķi gadījumi iezīmējas ar individuālu atšķirību un ārēju nejaušību. Konkrētu vienību patstāvīga pētīšana nedod iespēju gūt zinātnisku atziņu par parādības vispārējo būtību. Bet, ja novēro parādību kopumā, iespējams konstatēt stingri likumsakarīgu tās stāvokli, sakarību un mainību. Šāda veida likumsakarību sauc par statistiski konstatējamu likumsakarību.

Visu sabiedrisko parādību pamatā ir **objektīvi cēloņi**. Nav tādas parādības, kas varētu rasties no nekā vai arī kas neatstātu aiz sevis sekas. Pētīšanas procesā statistika balstās uz cēlonības objektīvas esamības atzīšanu. Statistika nerada parādību lielumus vai stāvokļus, bet tos tikai konstatē un analizē.

Statistiskās likumsakarības iezīmējas ar tām piemītošām īpašībām:

- statistiskās likumsakarībās pētāmās parādības līmeni, stāvokli, sastāvu un citus rādītājus raksturo **stabilitāte**, **regularitāte** un **atkārtošanās**. Taču tās neliecina par šo lielumu absolūtu nemainību, bet gan par parādību **relatīvu stabilitāti**. Ja mainās apstākļi, kādos reāli eksistē tā vai cita parādība, attiecīgi notiek pārmaiņas arī jau konstatētajās statistiskajās likumsakarībās;
- statistiskās likumsakarības ir objektīvi cēloniskas masveida procesu likumsakarības, kas rodas, veidojas un mainās atbilstoši tiem vai citiem objektīviem cēloņiem un kas pastāv neatkarīgi no tā, vai kāds tās pēta un atklāj vai ne;
- statistiskās likumsakarības ir vispārīgas masveida procesu likumsakarības, tās var pareizi izskaidrot tikai **konkrētos vēsturiskos apstākļos**, **vietā** un **laikā** un tikai tad, ja tās aptver kvalitatīvi viendabīgu statistisku kopumu.

Statistiskajām likumsakarībām ir ne tikai svarīga zinātniska, bet arī praktiska tautsaimnieciska nozīme, jo tās ļauj paredzēt masveida procesu attīstības gaitu un turpmāko pārmaiņu raksturu.

Likumsakarību izzināšana iespējama tikai tādā gadījumā, ja pēta nevis atsevišķu parādību, bet gan visu parādību kopumu (kopu), jo sabiedrības dzīves likumsakarības izpaužas tikai masveida parādībās.

Katrā konkrētā gadījumā **statistiskās izpētes objekts** ir **statistiskā kopa**. Statistiskās kopas var būt liels transportlīdzekļu, uzņēmumu, ģimeņu, iedzīvotāju un citu objektu skaits. Atsevišķos gadījumos statistiskās kopas var būt arī mazas (8—10 vienību).

Katru atsevišķu kopas elementu sauc par **statistiskās kopas vienību**.

Tieši variācijas pastāvēšana nosaka statistikas nepieciešamību. Sociāli ekonomiskām parādībām parasti ir lielas variācijas. Piemēram, cūkgaļas patēriņš uz vienu iedzīvotāju atsevišķos Latvijas reģionos var būt ļoti atšķirīgs, jo tas veidojas daudzu faktoru ietekmē (ekonomisko, sociālo, demogrāfisko u. c.). Pazīmes variācija var būt kvantitatīva un atributīva. Variācija ir **kvantitatīva**, ja variantes var izteikt ar skaitļiem, piemēram, vecums, darba alga. Variācija ir **atributīva**, ja variantes var raksturot tikai ar vārdiem (jēdzieniem), piemēram, nodarbošanās, tautība. Variāciju analizē ar variācijas rādītājiem.

Sabiedrības dzīves parādības un procesus statistika raksturo ar noteikta veida skaitļiem, kurus sauc par **statistikas rādītājiem**. Tie attēlo gan kopas vienības, gan arī visas kopas lielumu. Statistiskajā rādītājā izpaužas **kvalitatīvās** un **kvantitatīvās** puses vienotība.

Statistika raksturo arī **sabiedrisko parādību struktūru** – statistikas kopas sastāvdaļu savstarpējo izvietojumu un sakarību. Struktūra ir masveida parādību iekšējā uzbūve. Statistikai šo struktūru vajag atklāt, izteikt un attēlot ar statistisko rādītāju palīdzību.

Struktūras analīze atklāj sociāli ekonomisko parādību galvenās sastāvdaļas un novirzes, noskaidro cēloņus. Statistika sniedz priekšlikumus struktūras optimizācijai.

Struktūras pazīmes ir daudzveidīgas. Statistikas uzdevums ir izvēlēties būtiskākās pazīmes, kuras raksturo sociāli ekonomisko parādību struktūru.

Jebkurai sabiedriskai parādībai ir raksturīgas izmaiņas telpā un laikā (dinamikā).

Parādības dinamikas analīze ietver šādu lielumu noteikšanu:

- sabiedriskās parādības līmeņa lielumu noteiktā laika periodā (momentā),
- vidējā līmeņa lielumu,
- izmaiņu lielumu un tempu,
- izmaiņu pamattendences un likumsakarības.

Dinamikas analīze ietver arī statistisko prognožu izstrādāšanu.

Statistiskās kopas vienībām raksturīgās kopīgās īpašības sauc par **pazīmēm**. Līdzās kopējām pazīmēm kopas vienībām piemīt arī individuālās īpatnības (pazīmju variācija).

Sabiedrības dzīves parādības un procesus statistika raksturo ar noteikta veida skaitļiem, kurus sauc par **statistiskiem rādītājiem**. Tie attēlo kopas vienības un visas kopas lielumu.

Statistiku kā zinātni definējuši dažādi autori, tomēr šīs grāmatas autores to definē šādi:

> Statistika ir zinātne, kas pēta kvalitatīvi noteiktu masveida sociālekonomisko parādību un procesu skaitlisko pusi, to struktūru, sadalījumu, izvietojumu teritorijā un kustību laikā, nosakot pastāvošās skaitliskās tendences un likumsakarības.

Pastāv cieša saistība starp statistikas zinātni un statistikas praksi. Statistikas prakse lieto atzinumus (noteikumus), kurus izstrādājusi statistikas zinātne, un tajā pašā laikā statistikas zinātne balstās uz materiāliem, kurus sniedz statistikas prakse.

Statistikas uzdevums ir atrast zinātniski pamatotas metodes, ar kuru palīdzību pētniecības ceļā, sistematizējot masu novērojumos iegūtos skaitliskos lielumus, iespējams grupēt un kombinēt skaitliskās vērtības, izskaidrot cēloņsakarības. Statistikas zinātni interesē slēdzieni, kuru pamatā ir analīzes rezultāti un kuri iegūti statistisko datu savākšanas un apstrādes rezultātā.

Statistikas zinātnes vēsturiskajā attīstībā tās sastāvā izveidojušās atsevišķas statistikas disciplīnas: statistikas vispārīgā teorija, ekonomiskā statistika un tās nozares, sociālā statistika un tās nozares.

1.4. Statistikas metodes

Bez statistisko metožu lietošanas nav veicams neviens zinātnisks eksperiments vai pētījums. Bez statistiskās uzskaites nav iespējama sociālekonomisko procesu vadīšana un plānošana.

Statistikas pētīšanas pamatā ir visām zinātnēm kopīga metode – **dialektiskā metode**. Dialektisko likumu un kategoriju zināšanas ļauj statistikai pareizi izskaidrot parādības, kuras tā pēta, un izvēlēties metodoloģiski pareizu pieeju to izpētē un analīzē.

Tomēr statistikai kā zinātnei ir savi specifiski izpētes paņēmieni, ar kuriem tā atklāj likumsakarības sabiedrisko parādību skaitliskajā izpausmē.

Statistikas metodoloģija ir metožu sistēma, kas virzīta uz to skaitlisko likumsakarību izpēti, kuras parādās sociālekonomisko parādību struktūrā, dinamikā un savstarpējās sakarībās.

Statistiskās izpētes nosacījums ir pētāmā objekta vai procesa būtības izpratne un konkrēto apstākļu attīstības likumu un īpatnību pārzināšana.

Statistika visas parādības pēta to savstarpējā saistībā un izmaiņā, nosakot gan jauno un progresīvo, kas rodas pastāvošajā parādībā, gan arī attīstības virzienus.

Statistiskie pētījumi sastāv no trim stadijām:

- sākotnējās statistiskās informācijas vākšana;
- sākotnējo datu apstrāde, sakopošana, grupēšana;
- iegūto kopsavilkumu materiālu analīze un interpretācija.

Visi šie etapi ir savstarpēji saistīti. Ja kāds no tiem iztrūkst, zūd statistiskās pētīšanas nedalāmība.

Pirmā stadija – statistiskās informācijas vākšana – ir zinātniski pamatota ziņu vākšana par sociāli ekonomiskām parādībām vai procesiem. Iegūtai informācijai jābūt pilnīgai, savlaicīgai, pareizai un pēc iespējas ar zemākām izmaksām.

Otrajā stadijā – iegūtās informācijas apstrādē – lieto specifisku metodi – statistisko grupēšanu. Statistiskās grupēšanas un kopsavilkumu rezultātus atspoguļo statistisko tabulu veidā. Tabulas ir racionālākā, sistemātiskākā un uzskatāmākā statistisko datu attēlošanas forma.

Trešā stadija – statistiskā analīze – pēta sabiedrisko parādību vai procesu struktūru, dinamiku un savstarpējās sakarības.

Statistiskās analīzes galvenie etapi:

- faktu konstatēšana un novērtēšana;
- parādību galveno īpašību noteikšana;
- parādības salīdzināšana ar citām, par salīdzinājuma bāzi pieņemtām parādībām;
- hipotēzes, secinājumu un priekšlikumu formulēšana;
- izvirzīto hipotēžu pārbaude ar speciālu statistisko rādītāju palīdzību.

Statistiskās metodes ir cieši saistītas ar matemātiskajām metodēm. Skaitlisko attiecību mērīšanā un analīzē jāizmanto matemātiskie paņēmieni un metodes. Turklāt jāņem vērā, ka statistiskos pētījumos pielieto dažādu līmeņu sarežģītības matemātiku, sākot no vienkāršiem matemātikas paņēmieniem līdz pat speciālajām matemātikas disciplīnām – varbūtības teorijai un matemātiskai statistikai (variācijas rindu analīze, korelācijas un regresijas analīze u. c.).

Matemātikas nozīme statistikas attīstībā strauji palielinās mūsdienu apstākļos – datorizācijas laikmetā –, kas ļauj radīt statistikas datubāzes un to apstrādes programmas un saīsināt informācijas apstrādes termiņus.

Neskatoties uz matemātikas plašu izmantošanu, tā nevar pārvērst statistiku matemātikā, jo statistikas sociāli ekonomiskās dzīves pētījumos matemātika ir tikai pētījuma instruments. Statistika piemēro gan matemātiķu ieteiktos, gan arī pati savus paņēmienus un metodes konkrētu – parasti sociāli ekonomisko – objektu un parādību pētīšanai.

Statistikā plaši lieto grafisko metodi, kas ir tabulu metodes turpinājums un papildinājums.

Grafiki ir svarīgs datu izteiksmes un analīzes līdzeklis.

Ja informāciju un likumsakarības izmanto pareizi, statistiskās metodes ir tikpat precīzas kā matemātiskās metodes.

1.5. Statistikas darba organizācija Latvijā un starptautiskajās organizācijās

Ikviena valsts pati izvēlas, kas un kā veiks valsts statistikas uzdevumus, tādējādi plānojot, organizējot un analizējot statistikas datu vākšanu, apkopošanu un analizēšanu.

Latvijas Valsts statistikas pārvalde (tagad – Centrālā statistikas pārvalde) tika nodibināta 1919. gada 1. septembrī ar Ministru kabineta lēmumu.

Valsts statistikas galvenie uzdevumi noteikti Statistikas likumā.

Valsts statistikas galvenais uzdevums ir veidot vienotu statistiskās informācijas sistēmu par sabiedrībā notiekošajiem **ekonomiskajiem**, **demogrāfiskajiem** un **sociālajiem** procesiem un **vidi**, balstoties uz starptautiski atzītiem metodoloģiskiem principiem, kā arī, apkopojot un analizējot informāciju, darīt to pieejamu visai sabiedrībai.

Likumā akcentēti arī citi valsts statistikas uzdevumi:

- veidot vienotu statistiskās informācijas sistēmu par sabiedrībā notiekošajiem **ekonomiskajiem**, **demogrāfiskajiem** un **sociālajiem** procesiem un **vidi**, balstoties uz starptautiski atzītiem metodoloģiskiem principiem;
- **apkopot un analizēt** savākto statistisko informāciju;

- **izpētīt** sabiedrībā notiekošās sociāli ekonomisko procesu pārvērtības;
- **noskaidrot** sabiedriskās ražošanas efektivitātes rezerves;
- **publicēt** iegūto informāciju;
- ar ticamu statistisko informāciju **laikus nodrošināt** valsts pārvaldes orgānus;
- **sniegt** Saeimai, valsts un pašvaldību pārvaldes institūcijām, un plašākai sabiedrībai **statistisko informāciju**, kas nepieciešama lēmumu pieņemšanai, kā arī pētījumu un domu apmaiņas veicināšanai.

Latvijas statistikai līdzīgi kā Eiropas Savienības statistikai jābalstās uz objektivitātes, ticamības, derīguma, efektivitātes, statistiskās konfidencialitātes un caurskatāmības principiem.

Realitātei, kuru pēta statistika, jābūt atspoguļotai iespējami patiesi. Datu iegūšanas un apstrādes metodēm un procedūrām jābūt zinātniski pamatotām. Par tām un par datu avotiem jāinformē lietotāji.

Statistiskajai informācijai jābūt objektīvai un neatkarīgai. Neviens nav tiesīgs noteikt, kādiem jābūt statistikas iestāžu atzinumiem, kas pamatojas uz saņemto statistisko informāciju.

Valsts statistikas galvenie darbības **virzieni**:

- plaša starptautisko un, pirmkārt, ES statistisko standartu izmantošana klasifikāciju, metodoloģijas, informācijas un datu apstrādes sistēmas jomā;
- pilnu apsekojumu aizstāšana ar izlases apsekojumiem, kas ir viena no statistiskās informācijas vākšanas pamatmetodēm gan ES, gan arī citās pasaules valstīs;
- jaunu statistisko apsekojumu ieviešana;
- reģionālās un nozaru statistikas kvalitātes un informācijas detalizācijas pakāpes pilnveidošana;
- modernas informatīvās tehnoloģijas ieviešana un tai atbilstošas statistisko datu glabāšanas, apstrādes un pārraides infrastruktūras izveidošana;
- orientēšanās uz iespējami pilnīgāku statistiskās informācijas lietotāju (valsts pārvaldes institūciju, starptautisko organizāciju, zinātniskās pētniecības iestāžu, iedzīvotāju u. c.) interešu ievērošanu.

Centrālajai statistikas pārvaldei (CSP) ir **tiesības**:

- apstiprināt valsts statistikas pārskatu veidlapas un norādījumus par to aizpildīšanu;
- saņemt bez maksas no ministrijām un citām valsts un pašvaldību institūcijām savākto un apkopoto statistisko informāciju par ekonomiskajām un sociālajām parādībām un apkārtējo vidi;
- saņemt bez maksas no iedzīvotāju, uzņēmumu un citiem valsts reģistriem nepieciešamo informāciju valsts programmas izpildei;

- veikt mājsaimniecību statistisko novērošanu, iedzīvotāju aptaujas un citas aptaujas.

CSP un tai pakļauto valsts vai pašvaldību institūciju darbiniekiem aizliegts izpaust par fiziskajām un juridiskajām personām jebkādu informāciju, kura tiem kļuvusi zināma, pildot valsts pienākumus.

CSP sistemātiski jāinformē sabiedrība par valstī notiekošajām ekonomiskajām, demogrāfiskajām un sociālajām parādībām un procesiem.

Līdztekus Centrālajai statistikas pārvaldei Latvijā ar statistikas jautājumiem nodarbojas Latvijas Banka un citas valsts un pašvaldību institūcijas, kas risina atsevišķus valsts statistikas jautājumus.

Latvijas valsts statistika ir orientēta uz objektivitātes, ticamības, derīguma, efektivitātes un caurskatāmības principu ievērošanu.

Ticamība ir statistiku raksturojoša pazīme, kas izpaužas iespējami patiesā pētāmo parādību un procesu atspoguļošanā. Statistisko datu vākšanas, apstrādes un analīzes metodēm ir jābūt zinātniski pamatotām.

CSP statistiskās informācijas ieguvē plaši izmanto ES Centrālā statistikas biroja (*Eurostat*) un citu starptautisko statistikas organizāciju izstrādātās un ieviešanai ES valstīs ieteiktās klasifikācijas sistēmas un standartus.

CSP plaši sadarbojas ar dažādām starptautiskajām statistikas organizācijām, kurām tā sniedz statistisko informāciju par ekonomiskajiem, sociālajiem un demogrāfiskajiem procesiem Latvijā. Sadarbības ietvaros starptautiskās organizācijas Latvijai savukārt sniedz dažāda veida konsultācijas un materiālo palīdzību skaitļošanas tehnikas iegādei un statistisko apsekojumu veikšanai.

CSP statistiskā informācija regulāri tiek publicēta daudzos starptautiskos izdevumos, piemēram, Apvienoto Nāciju Organizācijas (*United Nations, UN*) un Apvienoto Nāciju Izglītības, zinātnes un kultūras organizācijas (*United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization, UNESCO)* izdevumos, kā arī dažādās datubāzēs.

Apvienoto Nāciju Organizācijas (ANO) Statistikas komisija:
- izstrādā statistisko darbu metodoloģiju un rādītāju salīdzināmību,
- gatavo ieteikumus ANO Statistikas biroja sekretariātam,
- koordinē ANO specializēto institūciju statistisko darbu,
- konsultē jautājumos, kas saistīti ar statistiskās informācijas vākšanu, uzkrāšanu, apkopošanu, analīzi un vispārināšanu.

ANO Sekretariāta statistikas birojs (izpildinstitūcija):
- savāc statistisko informāciju no ANO dalībvalstīm,
- publicē šo informāciju,
- gatavo referātus par dažādiem statistikas jautājumiem,
- izstrādā statistikas metodoloģiju.

Iegūtie rezultāti tiek publicēti dažādos periodiskajos izdevumos, piemēram, "Ikmēneša statistikas biļetenā", "Demogrāfijas gadagrāmatā", "Ārējās tirdzniecības gadagrāmatā" un citos.

Statistikas jautājumi regulāri tiek izskatīti reģionālajās (Eiropas, Āzijas, Tālo Austrumu, Latīņamerikas, Āfrikas) ekonomiskajās komisijās.

Ar statistisko datu apkopošanu, analīzi un metodoloģiskajiem jautājumiem nodarbojas statistikas dienesti arī citās starptautiskajās organizācijās. Plašāk pazīstamās ir:

- Eiropas Savienības Centrālais statistikas birojs (*Eurostat*),
- Starptautiskais Valūtas fonds (*International Monetary Fund*, *IMF*),
- Pasaules Banka (*World Bank, WB*),
- Starptautiskā Darba organizācija (*International Labour Organization*, *ILO*).

Statistikā starptautiskais zinātniskais centrs ir Starptautiskais statistikas institūts, kas dibināts 1885. gadā. Tas nodarbojas ar statistikas teorijas un metodoloģijas pilnveidošanu un praktisku izmantošanu, kā arī gatavo speciālistus jaunattīstības valstīm. Ik pēc diviem gadiem notiek institūta sesijas (pirmā bija 1887. gadā Romā).

Pārbaudes jautājumi

1. Ko nozīmē termins "statistika"?
2. Kādos virzienos iedala statistikas zinātni?
3. Kas ir statistikas pētīšanas priekšmets?
4. Kāds ir statistikas uzdevums?
5. Kādi ir statistiskās analīzes galvenie posmi?
6. Kas organizē statistikas darbu Latvijā un starptautiskajās organizācijās?

Jautājumi diskusijai

1. Jēdziena "statistika" kā zinātnes un praktiskais lietojums.
2. Statistikas vēsturiskā attīstība Latvijā.
3. Mūsdienu statistikas organizācijas un uzdevumi Eiropas Savienībā un pasaulē.
4. Aprakstošās statistikas vēsture.

Uzdevumi darbam auditorijā

1. Raksturojiet, kāda veida informācija jāapkopo par a) augstākās izglītības iestādēm, lai veiktu par tām statistisko analīzi; b) kredītiestādēm; c) patēriņtirgus analīzi; d) uzņēmumiem; e) būvniecības nozari.

2. Nosakiet kvantitatīvās un atributīvās pazīmes, kas raksturotu a) augstskolu studentu kopumu; b) komercbanku kopumu; c) valsts institūcijas.
3. Izmantojot statistikas datubāzēs esošo informāciju, izrakstīt datus, kas raksturo pētāmo objektu struktūru:
   1) uzņēmējdarbību pa komercdarbības formu veidiem;
   2) iedzīvotāju izdevumus;
   3) investīcijas pa nozarēm.

Uzdevumi apgūtās tēmas nostiprināšanai

1. Izmantojot ikmēneša statistikas pārskatu, statistikas gadagrāmatu vai citus interneta avotus, izveidot rādītāju/pazīmju sarakstu, kas var izmantot statistikas apsekojumiem, lai pilnībā raksturotu šādas parādības:
   1) populācija;
   2) patēriņtirgus;
   3) rūpniecības nozare;
   4) transports un sakari.
2. No statistikas datubāzes *www.csp.gov.lv* vai cita interneta avota izrakstīt raksturojošos datus piecu gadu laikā dinamikā par:
   1) Latvijas iedzīvotājiem;
   2) eksportu un importu;
   3) dažu veidu pārtikas produktu ražošanu;
   4) ASV dolāra maiņas kursu;
   5) patēriņa cenu indekss par precēm un maksas pakalpojumiem.

2. STATISTISKĀ NOVĒROŠANA UN DATU GRUPĒŠANA

Svarīgi statistikas pētījumu posmi ir statistikas informācijas vākšana, novērošana un grupēšana.

2.1. Statistiskā informācija un statistiskā novērošana

Tirgus ekonomikas apstākļos arvien lielāku nozīmi iegūst statistiskā informācija. Pamatojoties uz statistisko informāciju, valdība izstrādā valsts ekonomisko un sociālo politiku, analizē tās rezultātus, izstrādā ekonomiskās prognozes, slēdz starpvalstu līgumus. Statistiskā informācija nepieciešama arī uzņēmējiem un iedzīvotājiem.

Statistiskās informācijas galvenās īpašības ir masveidīgums un stabilitāte. Pirmā īpašība ir saistīta ar statistikas īpatnību, otrā – ar vienreiz savāktās informācijas nemainīgumu, tās īpašību novecot un nepieciešamību saņemt jaunu informāciju.

Statistiskā informācija (statistiskie dati) ir pirmatnējais statistiskais materiāls par sociāli ekonomiskajām parādībām, kas iegūts statistiskās novērošanas procesā; pēc tam tas tiek pakļauts sistematizācijai, kopsavilkumam, analīzei un vispārināšanai.

Ne katru informāciju, kas savākta statistiskās novērošanas procesā, var izmantot nākamajos pētījuma posmos. Lai informāciju varētu izmantot turpmākajos statiskajos pētījumos, tai jābūt:

- masveidīgai,
- ticamai,
- laikus sniegtai,
- stabilai,
- salīdzināmai,
- pilnīgai.

Informācijai jābalstās uz faktisko materiālu. Jebkurā līmenī un jebkurā statistiskās informācijas izmantošanas stadijā tās efektivitāti nosaka sākotnējie dati.

Informācijas kvalitāte un ticamība nosaka statistikas izmantošanas efektivitāti jebkurā līmenī un darbības jomā.

Makroinformācijai jābūt pieejamai jebkuram; mikroinformācijai jābūt slepenai. Tātad mūsdienu tirgus ekonomikas apstākļos statistiskajai informācijai, saglabājot individuālo datu konfidencialitāti, jābūt pieejamai plašām iedzīvotāju masām.

Mūsdienās statistiskās informācijas sastāvu galvenokārt nosaka sabiedrības vajadzības.

Galvenie statistiskās informācijas patērētāji ir valsts valdība, komercstruktūras, iedzīvotāji, starptautiskās organizācijas.

Statistiskā informācija ir svarīga daudzpusējā un divpusējā valstu sadarbībā.

Statistiskā informācija ir nepieciešama valdībai, lai izstrādātu tautsaimniecības attīstības prognozes, sastādītu budžetu u. c. Statistiskā informācija dod iespēju ministrijām un valdībai mērķtiecīgi sekot plāna (prognožu) izpildes gaitai, laikus uzzināt par iespējamām novirzēm no plānotajiem datiem un nepieciešamības gadījumā koriģēt agrāk pieņemtos plāna uzdevumus u. c.

Statistiskā informācija atklāj un raksturo neizmantotās rezerves dažādās tautsaimniecības nozarēs, pēta tautsaimniecībā izveidojušās proporcijas, laikus paredz iespējamo disproporciju rašanos un sekmē to novēršanu.

Statistisko informāciju var iegūt, izmantojot šādus statistiskās novērošanas paņēmienus:

- apkopojot statistiskos pārskatus un anketas;
- izmantojot valsts reģistru un citu informācijas sistēmu datus;
- veicot vienreizējās vai periodiskās skaitīšanas un apsekojumus;
- veicot statistisko novērošanu.

Statistiskie pētījumi sastāv no trim posmiem, un pirmais ir statistiskā novērošana.

Statistiskā novērošana ir sistemātiska informācijas vākšana par sabiedrībā notiekošajām ekonomiskajām, demogrāfiskajām un sociālajām parādībām un procesiem, kā arī par apkārtējo vidi saskaņā ar iepriekš izstrādātu programmu.

Statistiskās novērošanas **organizatoriskās formas** ir šādas:

- statistiskie pārskati,
- speciāli organizēta statistiskā novērošana,
- reģistri.

Valsts statistikas pārskats ir jebkura uz CSP apstiprinātas veidlapas atspoguļota statistiskā informācija.

Statistiskie pārskati ir statistiskās novērošanas galvenā organizatoriskā forma; ar to palīdzību statistikas iestādes noteiktā termiņā saņem vajadzīgo informāciju no iestādēm un organizācijām. Statistisko pārskatu ziņu avoti ir sākotnējā uzskaite – saimnieciskās vai citas darbības reģistrācija sākotnējās uzskaites dokumentos.

Pārskatu informācija ir pilnīga, jo ziņas parasti tiek vāktas no visiem uzņēmumiem un iestādēm.

Pārskatu informācija ir samērā lēta, un tās iegūšana neprasa ievērojamus papildlīdzekļus.

Pārskatiem raksturīgs, ka:

- tos **apstiprina** valsts statistikas institūcijas,
- tiem ir **obligāts raksturs** (jāiesniedz noteiktā termiņā),
- tiem ir **juridisks spēks** (paraksta uzņēmumu vadītāji),
- tiem ir **dokumentālais pamatojums** (pamatā ir sākotnējās uzskaites dokumenti).

Informācijas iesniegšana valsts statistisko novērojumu vajadzībām ir obligāta un pildāma bez maksas.

Pēc **perioda ilguma** pārskatus iedala:

- gada pārskatos;
- periodiskos pārskatos.

Atkarībā no **iesniegšanas operativitātes** pārskatus iedala:

- steidzamos pārskatos,
- pasta pārskatos.

Speciāli organizētā statistiskā novērošana tiek veikta, lai iegūtu datus, kuru nav pārskatos vai kuri nepieciešami pārskatos iekļauto datu pārbaudei. Īpatnība ir tā, ka datu novērošana tiek veikta pēc speciāla, bieži vien vienreizēja pasūtījuma. Šādus pasūtījumus izpilda statistikas iestādes, socioloģisko un mārketinga pētījumu centri un citas organizācijas. Valsts mērogā šādas novērošanas piemērs ir tautas skaitīšana.

Reģistru novērošana ir tādu ilgstošu procesu nepārtraukta statistiskā novērošana, kuriem ir fiksēts sākums, attīstības stadija un fiksētas beigas.

Reģistrs ir sistēma, kura pastāvīgi seko novērošanas vienību stāvoklim un novērtē dažādu faktoru ietekmi uz pētāmajiem rādītājiem. Reģistrā katru novērošanas vienību raksturo nevis viens rādītājs, bet gan rādītāju kopums. Atsevišķi rādītāji var nemainīties visā novērošanas laikā, un tos reģistrē vienu reizi. Tie rādītāji, kuru izmaiņu periodiskums nav zināms, tiek atjaunoti atbilstoši izmaiņām. Vēl ir arī dinamikas rindas rādītāji ar iepriekš zināmiem atjaunošanas periodiem.

Visi iegūtie rādītāji jāglabā līdz pētāmās kopas vienību novērošanas pabeigšanai.

Galvenie jautājumi, kas jāatrisina reģistru organizācijā un uzturēšanā, ir šādi:

- kad reģistrā ietvert un kad izslēgt kopas vienības;
- kāda informācija jāglabā;
- no kādiem avotiem jāņem dati;
- cik bieži jāatjauno un jāpapildina informācija.

Statistikas praksē visvairāk izplatīti ir iedzīvotāju reģistrs un uzņēmumu reģistrs, un tie būtiski atšķiras.

2.2. Statistiskās novērošanas veidi, programma, kļūdas

Statistisko novērojumu veidi atšķiras pēc informācijas reģistrācijas regularitātes un pēc pētījumu objekta aptveršanas pilnīguma.

Pēc **ziņu reģistrācijas regularitātes** izšķir **nepārtraukto** un **pārtraukto** statistisko novērošanu.

Pēc **pētāmā objekta vienību aptveršanas** izšķir **pilno** un **nepilno** novērošanu. Pilnajā novērošanā reģistrē visas pētāmā objekta vienības, nepilnajā – tikai daļu no pētāmā objekta vienībām, bet iegūto informāciju izmanto visas statistiskās kopas raksturošanai. Nepilnās statistiskās novērošanas galvenie veidi ir monogrāfiskā, galvenā masīva, anketveida, izlases novērošana.

Monogrāfiskā novērošana ir kādas parādības detalizēti sīka pētīšana.

Galvenā masīva novērošana ir to vienību novērošana, kurām ir noteicoša nozīme visu vienību kopumā. Pārējās kopuma vienības nemaz nenovēro, uzskatot, ka tām nav būtiskas nozīmes novērošanas uzdevuma veikšanā.

Anketveida novērošana ir speciālu veidlapu (anketu) izdalīšana vai izsūtīšana noteiktiem adresātiem, kā arī publicēšana presē, uzaicinot respondentus atbildēt uz jautājumiem un pēc tam anketu atsūtīt atpakaļ. Šo jautājumu saraksta aizpildīšana ir brīvprātīga, un tā parasti tiek veikta anonīmi, tāpēc atpakaļ tiek saņemts mazāks anketu skaits, nekā izsūtīts. Anketveida informācijas vākšanas paņēmienu lieto, ja netiek prasīta augsta datu precizitāte, bet vajadzīgi tuvināti, orientējoši dati, piemēram, pētot sabiedrības uzskatus par spēļu namu atrašanās vietām, par sabiedriskā transporta kursēšanas regularitāti u. c.

Izlases novērošana ir zinātniski visdetalizētāk izveidotā nepilnā statistiskā novērošana. To plaši lieto pētījumos, jo tās ietvaros novēro pietiekami daudz pētāmā objekta vienību un atlasē ņem vērā vienādiespējamības principu (visām pētāmā objekta vienībām ir vienāda varbūtība tikt iekļautām izlasē).

Pašreizējos apstākļos arvien biežāk ievieš speciāli organizētu novērošanu – monitoringu.

Monitorings (uzmērīšana, novērošana) ir apkārtējās vides stāvokļa novērošanas kontroles, analīzes un prognozēšanas informatīvā sistēma.

Visvairāk izplatīts ir **vides monitorings**. Tiek novēroti ķīmiskie, fizikālie un bioloģiskie rādītāji. Monitoringu izmanto arī dzīves kvalitātes un citos sociālo parādību un procesu pētījumos.

Katrai statistiskajai novērošanai ir savs mērķis. Lai nepieļautu lieku datu savākšanu, precīzi jānosaka statistiskās novērošanas mērķis un uzdevumi.

Jānosaka arī galvenās **hipotēzes** (pieņēmumi), kas jāpārbauda ar novērošanas datiem. Organizējot novērošanu, ir svarīgi noteikt novērošanas objektu. **Novērošanas objekts** ir sabiedriskās parādības un procesi, par kuriem jāsavāc statistiskā informācija. Novērošanas objekts var būt tūristi, uzņēmumi, augstāko mācību iestāžu studenti, iedzīvotāji, transportlīdzekļi u. c.

Izraugoties kādas statistiskās novērošanas objektu, dažreiz sarežģīts uzdevums ir to norobežot no citām līdzīgām pazīmēm. Objekts jānorobežo pēc **teritorijas**, **laika** un **sastāva**. Piemēram, nosakot transporta skaitīšanas objektu, precīzi jāformulē, kādus transporta veidus reģistrēs – visus vai tikai sabiedrisko transportu. Šādos gadījumos objektu norobežošanai nosaka pieņemtu skaitlisku robežu jeb **cenzu**. Cenza noteikšana nevar būt patvaļīga un nejauša. Nosakot cenzu, jāņem vērā novērojamās parādības stāvokļa un attīstības konkrētās īpatnības.

Novērošanas teritorija aptver visas novērošanas vienības atrašanās vietas. Tās robežas atkarīgas no novērošanas vienības noteikšanas.

Novērošanas vienība ir novērošanas objekta elementārā sastāvdaļa, kuras būtiskās pazīmes tiek reģistrētas novērošanas procesā.

Lai sekmīgi veiktu novērošanu, precīzi jāformulē tās uzdevumi, t. i., pētīšanas galamērķis, jo vienas un tās pašas sabiedriski ekonomiskās parādības var pētīt dažādos aspektos.

Novērošanas pazīmes ir īpašības, kas piemīt pētāmā kopuma vienībām, kuras novērošanas procesā fiksē attiecīgajos informācijas nesējos.

Statistiskajā novērošanā būtiska nozīme ir **novērošanas programmas izstrādāšanai**, jautājumu formulējumiem un secībai. Novērošanas programmas var būt vispārējas, ja jautājumus var attiecināt uz lielāko daļu pētāmo kopuma vienību, un specializētas, ja atsevišķas vienības ievērojami atšķiras no citām.

Statistiskās novērošanas programmai ir šādas prasības:

- programmas jautājumiem jābūt **precīziem**, **nepārprotamiem**, **viegli saprotamiem**, lai nodrošinātu iegūtās informācijas pareizību;
- programmā nevajadzētu ietvert jautājumus, kas iedzīvotājiem var likties **aizdomīgi** vai uz kuriem var apzināti dot nepareizas, neprecīzas atbildes;
- programmā jāietver **būtiskākās** pazīmes, kuras tieši raksturo pētāmo parādību;
- programmā jautājumiem jābūt **loģiskā secībā un attīstībā**. Jāsāk no vienkāršākiem un konkrētākiem jautājumiem, pakāpeniski pārejot uz plašākiem un sarežģītākiem jautājumiem. Katram iepriekšējam jautājumam zināmā mērā jāsagatavo atbilde uz nākamajiem jautājumiem;
- programmā ieteicams ietvert **kontroles rakstura** jautājumus savākto datu pārbaudei un precizēšanai.

Līdztekus novērošanas programmai parasti sagatavo arī **instrukciju**, kurā ievieto sīkākus paskaidrojumus par programmas jautājumiem, sniedz paraugus un norādījumus par veidlapu aizpildīšanu un atbilžu pareizības pārbaudi.

Novērošanas veidlapas ir aptaujas lapas, anketas, veidlapas utt., uz kurām nodrukāti novērošanas programmas jautājumi un kurās ieraksta novērošanā savākto sākotnējo statistisko informāciju.

Organizējot statistisko novērošanu, jāizlemj jautājums par novērošanas laika, novērošanas termiņa un kritiskā momenta noteikšanu.

Novērošanas laiks – laiks, uz kuru attiecas savāktā informācija. Datu reģistrēšanas laiku visām novērošanas vienībām nosaka vienotu, lai novērstu atkārtotu vai nepilnīgu uzskaiti, kā arī lai nodrošinātu datu salīdzināmību.

Novērošanas laika izvēle ir saistīta ar diviem jautājumiem:

- kritiskā momenta (datuma) noteikšana,
- novērošanas termiņa (perioda) noteikšana.

Kritiskais moments (datums) ir konkrēta diena gadā, konkrēta stunda dienā, kad tiek veikta vai jāveic pazīmju reģistrācija par katru pētāmās kopas vienību.

Novērošanas termiņš (periods) ir laiks, kurā notiek statistisko datu vākšana un veidlapu aizpildīšana. Jāatzīmē, ka novērošanas perioda attālināšana no kritiskā momenta var negatīvi ietekmēt iegūto datu ticamību.

Statistiskās novērošanas organizācijas vissvarīgākā prasība ir precizitāte un ticamība.

Precizitāte nozīmē ar statistiskās novērošanas palīdzību iegūtā pētāmā rādītāja lieluma atbilstību tā reālajam lielumam. Jo tuvāks statistiskās novērošanas rezultātā iegūtais lielums tā faktiskajam lielumam, jo augstāka ir statistiskās novērošanas precizitāte.

Starpību (novirzi) starp pētāmās parādības aprēķinātajiem un faktiskajiem rādītājiem sauc par novērošanas kļūdu. Kļūdas novērošanā pilnībā novērst nav iespējams. Tās rada ne tikai objektīvi cēloņi, kas saistīti ar novērošanā iesaistīto darbinieku personiskajām īpašībām, bet arī objektīvi cēloņi – organizatoriskas un tehniskas grūtības precīzi konstatēt un reģistrēt pētāmo sabiedrisko parādību sarežģītās pazīmes. Kļūdas, kuras tiek pieļautas statistiskās novērošanas procesā, iedala:

- reģistrācijas kļūdās,
- reprezentācijas kļūdās.

Reģistrācijas kļūdas ir faktu nepareiza konstatēšana vai reģistrēšana. Tās iedala:

- nejaušās,
- sistemātiskās.

Reģistrācijas kļūdas var rasties gan pilnajā, gan arī nepilnajā statistiskajā novērošanā.

Nejaušās kļūdas rodas ziņu sniedzēja vai reģistrētāja neuzmanības, paviršības, noguruma vai cita iemesla rezultātā.

Sistemātiskās kļūdas var būt:

- apzinātas,
- neapzinātas.

Apzinātās kļūdas (tīša, tendencioza faktu sagrozīšana) rodas, kad respondents, zinot lietu faktisko stāvokli, apzināti sniedz nepareizus faktus.

Neapzinātās kļūdas rodas dažādu nejaušu iemeslu dēļ, piemēram, mērinstrumentu neprecizitāte, reģistratora neuzmanība vai paviršība u. c.

Reprezentācijas kļūdas ir saistītas ar vienu novērošanas veidu – nepilno statistisko novērošanu. Šīs kļūdas rodas tāpēc, ka novērošanai netiek pakļautas visas kopuma vienības. Variējoša kopuma daļa nekad pilnā mērā nevar atbilst visam kopumam, nevar to pilnībā pārstāvēt.

Gan reģistrācijas, gan arī reprezentācijas kļūdas iedala nejaušās un sistemātiskās.

Reprezentācijas nejaušās kļūdas ir novirze, kas rodas nepilnajā novērošanā, jo novērošanai atlasīto vienību kopa nepilnīgi atspoguļo visu kopu. Reprezentācijas nejaušās kļūdas var aprēķināt, izmantojot matemātiskās metodes.

Reprezentācijas sistemātiskās kļūdas rašanās cēlonis ir nepareizi organizēta nepilnā novērošana. Šīs kļūdas kvantitatīvo lielumu noteikt nevar.

Statistiskās novērošanas kļūdas ir jācenšas novērst. Tas jādara gan pirms novērošanas, to racionāli organizējot un nepieļaujot vai samazinot kļūdu rašanās iespējas, gan arī novērošanas procesā, to sistemātiski kontrolējot.

Statistiskās novērošanas materiālu kontroli veic vairākos etapos:

- pārbauda novērošanas vienību aptveršanas pilnību (salīdzina saņemto pārskatu skaitu ar uzņēmuma un iestāžu reģistra datiem);
- pārbauda katra novērošanas formulāra (pārskata veidlapas, aptaujas anketas u. c.) aizpildīšanas pilnību.

Pēc tam novērošanā iegūto materiālu pārbauda pēc būtības, lietojot loģisko un aritmētisko (skaitļošanas) kontroli.

Loģiskajā kontrolē, pretstatot dažādus savstarpēji saistītus rādītājus, pārliecinās par datu loģisko iespējamību. Tā, piemēram, ja Saeimas deputāta alga ir norādīta 200 EUR vai piecgadīga bērna iztikas avots ir norādīta darba alga, tas liecina, ka atbilde ir loģiski neatbilstoša.

Skaitļošanas kontrole – aritmētisko aprēķinu precizitātes pārbaude.

Loģisko un skaitļošanas kontroli var lietot, lai pārbaudītu ne tikai speciālo statistisko novērojumu materiālu, bet arī statistikas pārskatus.

Novērošanas materiāla kontrole var būt pilnīga vai daļēja (izlases veida).

Kontroles plašums un dziļums atkarīgi arī no novērošanā iegūstamā statistiskā materiāla sociālekonomiskā svarīguma pakāpes.

Pārbaudītājs nedrīkst veikt labojumus statistikas pārskatu veidlapās un aptaujas anketās. Ja tāda nepieciešamība radusies, pašam statistiķim jāveic atkārtota novērošana (aptauja u. c.) vai arī jāvēršas pie personām, kuras atbild par iesniegto informāciju (uzņēmuma direktors, galvenais grāmatvedis, preses sekretārs utt.).

Novērošanas datus uzskata par pieņemtiem, ja tiem ir veikta kontrole un, ja nepieciešams, izdarīti labojumi. Ar savākto datu pārbaudi noslēdzas statistiskās novērošanas pirmais (sākuma) posms.

2.3. Statistiskās grupēšanas veidi

Statistiskās novērošanas rezultātā iegūst plašu, daudzpusīgu sākotnējo informāciju par statistiskās kopas atsevišķām vienībām. Tālākais statistikas uzdevums ir sniegt kopēju raksturojumu. Kopēju raksturojumu par visu kopu var iegūt, tikai sistematizējot un apkopojot saņemto informāciju. Rezultātā savāktie individuālie dati pārvēršas statistisko radītāju sistēmā, kas dod iespēju kopumā novērtēt pētāmo parādību, atklāt tās attīstības tendences un likumsakarības. Sakopošana palīdz pāriet pie kopsavilkuma rādītājiem kopumā un pie atsevišķām tā daļām.

Statistiskā sakopošana ir zinātniski organizēta novērošanas datu apstrāde – sistematizēšana, grupēšana, darba un analītisko tabulu aizpildīšana, vidējo un relatīvo lielumu aprēķināšana –, lai varētu veikt pētāmo parādību un procesu analīzi un prognozēšanu.

Sakopošanas uzdevums – ar statistisko rādītāju sistēmas palīdzību raksturot pētāmo objektu un noteikt un izskaidrot tā raksturīgākās pazīmes un īpašības.

Statistiskie kopsavilkumi atšķiras pēc:

- uzbūves sarežģītības,
- statistiskās novērošanas materiālu izstrādes veida un tā veikšanas vietas.

Pēc uzbūves sarežģītības var nodalīt vienkāršo kopsavilkumu un kopsavilkumu plašākā nozīmē. Ja kopsavilkums parāda summas par visu pētāmo kopu bez iepriekšējā savāktā materiāla sistematizācijas, tad tas ir tā saucamais vienkāršais kopsavilkums. Šajā gadījumā kopsavilkums nosaka pētāmās parādības rādītāju kopējo lielumu. Piemēram, lai noskaidrotu augstāko mācību iestāžu studentu skaitu Latvijā, atliek tikai saskaitīt studējošos visās augstskolās, tādējādi iegūstot kopsavilkumu (kopējo studentu skaitu Latvijā).

Statistiskais kopsavilkums plašākā nozīmē prasa statistisko datu sistematizāciju un grupēšanu, izveidoto grupu raksturošanu ar rādītāju sistēmu, atbilstošu kopsummu aprēķināšanu un kopsavilkuma rezultātu atspoguļošanu statistiskajās tabulās un grafikos.

Sākotnējās informācijas statistiskās sakopošanas pamats ir vienveidīgu ekonomisko grupu nodalīšana, kas ir būtisks noteikums šīs informācijas zinātniskai izstrādei un praktiskai izmantošanai tautsaimniecības raksturošanas nolūkā.

Sakopošana notiek pēc speciāli izstrādātas programmas, kas ļauj iegūt datus pēc daudzām pazīmēm, raksturojot gan parādību kopumā, gan arī tās atsevišķās sastāvdaļas ar daudziem rādītājiem.

Sakopošanas programma jāizstrādā vienlaikus ar statistiskās novērošanas programmu vai pat pirms tās, lai būtu nodrošināta visa statistiskās pētīšanas kompleksā procesa (novērošanas, sakopošanas un analīzes) metodoloģiskā un organizatoriskā vienotība.

Sakopošanas programmai ir šādi etapi:
- sakopošanas uzdevuma formulēšana, ņemot vērā statistiskā pētījuma mērķi;
- grupēšanas pazīmes izvēle;
- grupu formēšanas kārtības noteikšana;
- statistisko rādītāju sistēmas izstrāde, lai raksturotu atsevišķas grupas un objektu kopumā;
- savāktā materiāla pilnības un kvalitātes pārbaude, dažādu summu saskaitīšana un nepieciešamo rādītāju aprēķināšana, lai raksturotu visu kopu un tās daļas;
- statistisko tabulu un maketu izstrāde rezultātu raksturošanai.

Statistiskās sakopošanas izstrādāšanas veidi ir:
- centralizētais,
- decentralizētais.

Katram no sakopošanas veidiem ir savas raksturīgās īpašības un priekšrocības, kas nosaka to praktiskās lietošanas lietderīgumu un iespējas.

Ar centralizēto sakopošanu iespējams pilnīgāk nodrošināt sakopošanas metodoloģisko vienveidību, labāk organizēt darbu, to sadalīt un specializēt, kā arī plaši lietot augstražīgu skaitļošanas tehniku. Centralizētajā sakopošanā iespējams izveidot daudz plašāku programmu nekā decentralizētajā sakopošanā, kas ļauj ievērojami padziļināt datu analīzi. Daudzus visu valsti aptverošus grupējumus un kopsavilkumus var iegūt tikai ar centralizēto sakopošanu. Tomēr negatīvais aspekts ir tas, ka novērošanas materiālu koncentrācija dažu valstu centros samazina to loģiskās kontroles iespējas.

Decentralizētajā sakopošanā novērošanas procesā iegūtie dati tiek apkopoti pakāpeniski – no apakšas uz augšu pa pārvaldes hierarhijas kāpnēm, turklāt katrā etapā notiek atbilstoša datu apstrāde.

Statistiskā grupēšana ir novērotā kopuma vienību mērķtiecīga sadalīšana noteikta daudzuma daļās pēc kādas būtiskas pazīmes vai arī kopuma vienību apvienošana pēc kādas būtiskas pazīmes.

Ar grupēšanu var risināt dažādus uzdevumus, bet par galvenajiem uzskatāmi šādi uzdevumi:
- izveidot parādību sociālekonomiskos tipus;
- pētīt sabiedrisko parādību struktūru un tās pārmaiņas;
- noskaidrot un raksturot sakarības starp parādībām vai starp vienas parādības dažādām pazīmēm.

Šie trīs uzdevumi ir metodoloģiski un organizatoriski saistīti.

Atbilstoši trim grupēšanas uzdevumiem lieto šādus statistisko grupējumu veidus: tipoloģisko, struktūras un analītisko.

Tipoloģiskā grupēšana. Tās galvenais uzdevums – no daudzām pētāmo parādību raksturojošām pazīmēm izvēlēties kvalitatīvi vienveidīgus galvenos tipus.

Tipoloģisko grupējumu plaši izmanto ekonomiskajos un sociālajos pētījumos (piemēram, īpašuma formu grupējumi, nodarbināto sociālais grupējums, rūpniecības produkcijas ražošana valsts, kooperatīvos, privātos uzņēmumos). Sociāli ekonomisko parādību tipu nodalīšana rada iespēju izsekot to veidošanās procesam, attīstībai un atmiršanai, kas arī ir tipoloģiskās grupēšanas galvenais uzdevums.

Lai veiktu tipoloģisko grupēšanu:

- jānosauc parādību tipi, kuri ir jānodala;
- jāizveido grupēšanas pazīmes, kuras veido parādību tipu aprakstu;
- jānosaka intervāla robežas;
- jānoformē grupējumu rezultāti tabulu veidā, apvienojot nodalītās grupas izraudzītajos parādību tipos un nosakot vienību skaitu grupā.

Veiktās tipoloģiskās grupēšanas pareizība ir jāpārbauda. To izdara, aprēķinot kopsavilkuma rādītājus nodalītajiem tipiem (vidējos, relatīvos u. c. lielumus).

Struktūras grupēšana dod iespēju noskaidrot kvalitatīvi vienveidīgas kopas sastāvu pēc kādas skaitliskās vai atributīvās pazīmes un izsekot kopas sastāva pārmaiņām (piemēram, eksporta un importa apjoms pa preču grupām, tautas saimniecībā nodarbināto sastāvs pa profesijām, pēc izglītības līmeņa un tajā notikušajām pārmaiņām).

Struktūras grupēšanas uzdevums ir:

- izzināt kvalitatīvi vienveidīgas kopas struktūru,
- izanalizēt struktūras raksturu,
- izsekot struktūras pārmaiņām dinamikā.

Analītiskās grupēšanas uzdevums ir atklāt un raksturot sakarus starp dažādām parādībām (piemēram, pamatlīdzekļu apjoma un fondu atdeves ietekme uz ražotās produkcijas un pakalpojumu apjomu u. c.). Analītiskā grupēšana raksturo savstarpējās sakarības starp divām vai vairākām pazīmēm, no kurām vienu uzskata par rezultātu, bet citu (citas) par faktoru (faktoriem).

Kombinētajā grupēšanā grupas tiek veidotas pēc divām vai vairākām pazīmēm, sākot ar atributīvajām pazīmēm. Tās sakārto, pamatojoties uz savstarpējām sakarībām.

Otrreizējās grupēšanas uzdevums ir jaunu grupu izveidošana, balstoties uz agrākajiem grupējumiem un neizmantojot šim nolūkam sākotnējo statistiskās novērošanas informāciju.

Lai būtu iespējama jau sagrupētā materiāla proporcionāla pārveidošana, otrreizējā grupēšanā pieņem, ka novērošanas vienības ar dažādiem skaitliskiem lielumiem pētāmajā kopā sadalās vienmērīgi. Lieto divus jaunu grupu veidošanas paņēmienus:

- pirmais paņēmiens – sākotnējo intervālu apvienošana. To galvenokārt izmanto, lai pārietu no mazākiem intervāliem uz lielākiem intervāliem;
- otrais paņēmiens, saukts arī par **daļu pārgrupēšanu**, sastāv no jaunu grupu veidošanas. Tas pamatojas uz noteiktas daļas kopas vienību ieskaitīšanu katrā grupā.

Īpašs grupēšanas veids ir klasifikācijas. Tās plaši lieto statistikā.

Klasifikācijas ir objektu kopas iedalījums grupās, klasēs, kategorijās pēc to elementu un vienību raksturīgākajām kopīgajām īpašībām attiecībā pret kādu šajā kopā dotu ekvivalenti. Klasifikācijai jābūt pilnīgai un precīzai.

Klasifikācijas raksturīgākās iezīmes:

- tās pamatā jābūt kvalitatīvai pazīmei;
- tās standartus nosaka valsts un starptautiskās organizācijas;
- tās ir stabilas un paliek nemainīgas ilgāku laiku.

Ja novērošanā parādās jaunas grupas, tad mainās arī klasifikācijas. Tajās tiek izdarītas attiecīgas izmaiņas un papildinājumi. Klasifikācija ir grupēšanas pamats, jo tajā ir precīzi noteiktas iespējamās grupas un detalizēti tie rādītāji, kuri palīdz jebkuru objekta vienību pieskaitīt attiecīgajai grupai.

Klasifikators – sistematizēts kopas elementu, vienību saraksts, viens no svarīgākajiem dokumentiem datu apstrādes automatizēto sistēmu projektēšanā.

2.4. Statistiskās grupēšanas pazīmes, grupu un intervālu veidošana

Grupēšanā svarīguma ziņā viens no galvenajiem jautājumiem ir grupēšanas pazīmes izvēle.

Pazīmei, kura ir grupēšanas pamatā, jābūt zinātniski pamatotai. Lai grupējums atspoguļotu pazīmju mijiedarbību, no daudzām pazīmēm, kas raksturo kopuma vienības, ir jāizvēlas pašas būtiskākās. Tātad jāizvēlas tāda pazīme, kura vispilnīgāk atbilst pētījuma mērķim un sākotnējo datu raksturam, t. i., galveno, noteicošo. **Noteicošā pazīme** ir tā, kura vispilnīgāk un precīzāk raksturo pētāmo objektu. Piemēram, lauksaimniecības uzņēmumus var raksturot daudzas pazīmes: lauksaimniecībā izmantojamās zemes platība, pamatlīdzekļu apjoms, nodarbināto skaits u. c. Katrai no šīm pazīmēm ir sava noteikta nozīme, bet galvenā, noteicošā pazīme ir ražotās lauksaimnieciskās produkcijas apjoms.

Analoģiski arī studentus var raksturot dažādas pazīmes, tomēr galvenā, noteicošā ir studentu sekmes.

Lai praksē lietotu grupēšanas metodi, ir jāatrisina šādas grupēšanas metodoloģiskās problēmas:

- grupēšanas pazīmes izvēle,
- grupu skaita noteikšana,
- grupu intervāla noteikšana,
- grupu raksturojošo rādītāju noteikšana katram konkrētam gadījumam,
- tabulu maketu sastādīšana grupējumu rezultātu atspoguļošanai.

Grupēšanas procesā tiek prasīts, lai izvirzītās grupas būtu **reālas**. Grupu veidošana ir viens no grūtākajiem un atbildīgākajiem jautājumiem, jo jāizvēlas tāda pazīme, kura vispilnīgāk atbilst pētījuma mērķim un sākotnējo datu raksturam, tas ir galveno, noteicošo. Visas daudzveidīgās pazīmes var klasificēt pēc dažādiem veidiem. Pēc izteiksmes veida iedala:

- **atributīvās pazīmes**, kas atspoguļo parādības kvalitatīvi atšķirīgo stāvokli (dzimums, nodarbošanās u. c.);
- **kvantitatīvās pazīmes**, kas atspoguļo parādības lielumu vai stāvokli ar skaitļiem (bērnu skaits ģimenē, darba samaksa, vecums u. c.).

Kvantitatīvās pazīmes savukārt atšķiras pēc skaitlisko lielumu pārmaiņu rakstura, un tās iedala:

- **diskrētajās** (pārtrauktajās) **pazīmēs**, kuru nozīme var izpausties tikai noteiktu (parasti veselu) skaitļu veidā, starp kuriem nevar būt nekādu skaitlisku starpvērtību (studentu, uzņēmumu, transportlīdzekļu, mājdzīvnieku skaits u. c.);
- **nepārtrauktajās pazīmēs**, kuru nozīmes noteiktās robežās var izteikt jebkurš skaitlisks lielums (peļņa, saražotās produkcijas apjoms EUR, cilvēka vecums gados u. c.).

Pēc **nozīmes** pētāmo parādību savstarpējo saistību noteikšanā pazīmes iedala:

- **faktoriālās pazīmēs**, kuras iedarbojas uz citām pazīmēm;
- **rezultatīvās pazīmēs**, kuras ietekmē citas pazīmes.

Jāatzīmē, ka vienā gadījumā pazīmes var būt faktoriālas, citā gadījumā – rezultatīvas.

Laika ziņā pazīmes iedala:

- **nemainīgās pazīmes**, kuru nozīmes vienības pastāvēšanas laikā paliek vienas un tās pašas (dzimšanas vieta, laiks u. c.);
- **mainīgās pazīmes** (dzīvesvieta, ģimenes stāvoklis, profesija, darba samaksa u. c.).

Intervāls – variējošās pazīmes nozīmes, kas atrodas noteiktās robežās. Katram intervālam ir savs garums, sava apakšējā un augšējā robeža.

Intervāla **apakšējā robeža** ir pazīmes minimālā nozīme intervālā. **Augšējā robeža** ir pazīmes maksimālā nozīme intervālā.

Intervāla garums ir starpība starp intervāla augšējo un apakšējo robežu.

Pastāv slēgtie un atvērtie intervāli. **Slēgtiem intervāliem** norādīta intervāla apakšējā un augšējā robeža. **Atvērtiem intervāliem** norādīta tikai viena intervāla robeža – apakšējā vai augšējā.

Slēgtos intervālus iedala:

- **vienāda** garuma intervālos,
- **nevienāda** garuma intervālos.

Intervāla vidējo nozīmi aprēķina, summējot intervāla apakšējo un augšējo robežu un iegūto summu dalot ar 2.

Kad grupēšanas pazīmes noteiktas, kopas vienības sadala grupās. Grupu skaits ir atkarīgs no tās pazīmes veida, kura ir grupēšanas pamatā.

Izšķir vienkāršo un salikto grupēšanu. **Vienkāršajā grupēšanā** pētāmā kopuma vienību grupas izveido pēc vienas pazīmes. Vienkāršo grupējumu pozitīva īpašība ir to skaidrība un uzskatāmība, taču analīzes iespējas dažreiz ir nepietiekamas.

Salikto grupēšanu veic pēc divām vai vairākām pazīmēm, tās savstarpēji saistot un attiecīgi kombinējot. Piemēram, grupas, kuras izveidotas pēc vienas pazīmes, sadala apakšgrupās pēc citas pazīmes.

Viena no galvenajām prasībām ir tāda grupu skaita un intervāla garuma izvēle, kura ļauj vienmērīgi sadalīt kopas vienības pa grupām, ievērojot to pārstāvniecību un kvalitatīvo vienveidību.

Grupēšanas skaita izvēlē jācenšas noteikt, kāda ir pētāmās parādības raksturīgākā iekšējā diferenciācija, lai izraudzītais grupu skaits un robežas to pareizi atspoguļotu.

Grupu skaits ir atkarīgs no pazīmes veida (kvantitatīva, atributīva, pārtraukta, nepārtraukta), kura ir grupēšanas pamatā. Grupējot kopuma vienības pēc atributīvās pazīmes, grupu skaitu parasti nosaka pati pazīme. Piemēram, grupējot iedzīvotājus pēc dzimuma, iespējamas tikai divas grupas (vīrietis, sieviete); grupējot pēc ģimenes stāvokļa – iespējamas četras grupas (precējies, neprecējies, šķirtenis, atraitnis). Šajā gadījumā grupu skaitu nosaka pētāmās pazīmes nozīmju reāli pastāvošais variantu skaits.

Ja grupēšanas pamatā ir kvantitatīva pazīme, grupu skaita noteikšana ir atkarīga no tā, vai kvantitatīvā pazīme ir diskrēta (pārtraukta) vai nepārtraukta. Ja diskrētās pazīmes variācija nav plaša, var izveidot tik daudz grupu, cik ir grupēšanas pazīmes diskrēto nozīmju. Ja diskrētās grupēšanas pazīmes dažādo nozīmju skaits ir liels, jāveido intervāli, norādot katrai grupai intervāla zemāko un augstāko robežu (piemēram, iedzīvotāju sadalījums pēc ienākuma līmeņa, pēc atsevišķu pārtikas produktu patēriņa u. c.).

Ja grupu ir ļoti daudz, daļai no tām var izrādīties pārāk maz vienību, un tad grupu raksturojums ir nestabils. Šo apsvērumu nedrīkst lietot formāli, jo nelielām grupām dažreiz ir svarīga nozīme sabiedrisko parādību attīstības raksturošanā. Atsevišķas grupas var būt mazas tāpēc, ka tās pārstāv kādu jaunu pētāmās parādības tipu, kas tikai vēl rodas.

Grupas var būt vai nu vienāda plašuma, vai dažāda plašuma intervālu. Vienāda plašuma intervālus parasti izveido tad, ja grupēšanas pazīmes variācija ir vienmērīga, piemēram, grupējot iedzīvotājus pēc vecuma.

Ja grupēšanas pazīmes skaitlisko nozīmju amplitūda ir liela, piemērotāki ir dažāda plašuma intervāli, piemēram, grupējot noguldījumu apjomus bankā.

Ja kopas apjoms ir neliels, nav ieteicams veidot lielu grupu skaitu, jo katrā grupā ietilpst neliels novērošanas vienību skaits. Līdz ar to rādītāji, kurus aprēķina šādām grupām, nebūs reprezentatīvi un neļaus iegūt pētāmai parādībai pareizu raksturojumu.

Ja pētāmai pazīmei nozīmju variantu skaits ir ļoti liels, jāveido intervāli.

Intervāla garums ir starpība Δi starp pazīmes maksimālo $X_{\max}$ un minimālo $X_{\min}$ nozīmi katrā grupā. To aprēķina pēc formulas:

$$\triangle i = X_{\max} - X_{\min}.$$

Pieņem, ka pirmā intervāla zemākā robeža ir vienāda ar pazīmes minimālo nozīmi.

Veidojot nepārtrauktu pazīmju intervālu sadalījuma rindu, divu blakus esošo intervālu augšējā un apakšējā robeža var būt vienāda, t. i., pirmā intervāla augšējā robeža ir vienāda ar otrā intervāla apakšējo robežu. Piemēram, darba alga (EUR):

- 300—400;
- 400—600;
- 600—850;
- 850—1100.

Šajā gadījumā jādod paskaidrojums, kurā intervālā ieskaita kopas vienības, kas sakrīt abiem intervāliem. Lai novērstu nenoteiktību, var pieņemt, ka kreisajā intervāla pusē ietilpst norādītā intervāla nozīme, bet labajā pusē – neietilpst.

Pastāv slēgtie un atvērtie intervāli. Slēgtajiem intervāliem norādīta intervāla apakšējā un augšējā robeža. Piemēram, darba meklētāju vecums gados: 15—24, 25—34, 35—54, 55—74.

Atvērtajiem intervāliem norādīta tikai viena intervāla robeža – vai nu apakšējā, vai augšējā. Piemēram, sieviešu vecums gados: līdz 14, 15—24, 25—44, 45—64, 65—84, 85 un vairāk.

Piemērā par sieviešu vecumu pirmais un pēdējais intervāls ir atvērts, pārējie ir slēgti. Atvērtu intervālu nepieciešamība ir saistīta ar pētāmo pazīmju vērā ņemamo svārstīgumu, kas prasa liela grupu skaita veidošanu. Piemēram, sieviešu vecumu skaita no 0 gadiem, tātad papildus vēl vajadzētu izveidot daudz grupu.

Intervāla vidējo nozīmi slēgtiem un atvērtiem intervāliem aprēķina dažādi.

Slēgtiem intervāliem to aprēķina, summējot intervāla apakšējo un augšējo robežu un iegūto summu dalot ar 2:

$$\overline{X} = \frac{X_{\min} + X_{\max}}{2}.$$

Piemēram, darba meklētāju vidējais vecums būs

$$\overline{X_1} = \frac{15+24}{2} = 19,5 \text{ gadu}; \ \overline{X_2} = \frac{25+34}{2} = 29,5 \text{ gadu};$$

$$\overline{X_3} = \frac{35+54}{2} = 44,5 \text{ gadu}; \ \overline{X_4} = \frac{55+74}{2} = 64,5 \text{ gadu}.$$

Atvērtiem intervāliem, ja visu intervālu garums ir vienāds, pirmā atvērtā intervāla vidējo nozīmi aprēķina, no otrā intervāla vidējās nozīmes atņemot otrā intervāla garumu. Citiem vārdiem sakot, par cik atšķiras otrā intervāla maksimālā un minimālā robeža, par tik arī jāatšķiras pirmā intervāla maksimālajai un minimālajai robežai:

$$14 - 9 = 5 \text{ gadi}.$$

Pēdējā atvērtā intervāla vidējo nozīmi aprēķina, pie iepriekšējā intervāla vidējās robežas pieskaitot šī intervāla garumu:

$$(84 - 65) + 85 = 104 \text{ gadi}.$$

Slēgtos intervālus iedala:

- vienāda garuma intervālos,
- nevienāda garuma intervālos.

Ja grupu intervāli ir vienāda garuma un ir zināms statistiskā novērojuma kopas vienību skaits N, tad grupu skaitu n var aprēķināt pēc amerikāņu zinātnieka Sterdžera formulas:

$$n = 1 + 3,222 \lg N.$$

Formulas trūkums ir tas, ka tās lietošana ir piemērota tikai tādā gadījumā, ja kopa sastāv no konstanta novērošanas vienību skaita un vienību sadalījums pēc pazīmes, kura ir grupējuma pamatā, ir tuvs normālajam sadalījumam.

Praksē viena grupējuma ietvaros var lietot vairākas pazīmes un noteikt dažāda garuma intervālus. Tā kā visi intervāli nav vienāda garuma, tad pirmā atvērtā intervāla vidējo nozīmi atsevišķos gadījumos var arī aprēķināt, summējot apakšējo robežu (0 gadu) ar augšējo robežu (14 gadu) un rezultātu dalot ar 2:

$$\overline{x_1} = \frac{0+14}{2} = 7 \text{ gadi}.$$

Intervāla robežas bieži ir atkarīgas no vietas apstākļiem un laika. Piemēram, tautsaimniecības nozaru grupējums pēc darba algas parāda, ka transporta nozarē darba alga ir daudzreiz lielāka nekā lauksaimniecības nozarē. Sakarā ar to diferencēti jānosaka intervāla robežas dažādām tautsaimniecības nozarēm. Praksē izmanto grupējumus ar specializētiem intervāliem. Specializētie intervāli ir intervāli, kurus lieto, lai no kopas nodalītu vienu un to pašu tipu pēc vienas un tās pašas pazīmes parādībai, kas atrodas dažādos apstākļos.

Atkarībā no grupēšanā lietotās informācijas rakstura statistisko grupēšanu iedala:

- sākotnējā grupēšanā,
- otrreizējā grupēšanā.

Sākotnējai grupēšanai izmanto novērošanā iegūto individuālo informāciju par atsevišķām kopuma vienībām.

Dažreiz var gadīties, ka sākotnējos grupējumos grupu skaits vai plašums nav tāds, kāds nepieciešams tautsaimniecības analīzei.

Grupējumi, kas izveidoti par vienu un to pašu laika posmu, bet par dažādiem reģioniem, valstīm, vai arī par vienu reģionu, valsti, bet par dažādiem laika posmiem, var būt **nesalīdzināmi**, tāpēc ka:

- nodalīto grupu skaits ir dažāds;
- intervāla robežas ir nevienādas.

Lai šos dažādos grupējumus varētu salīdzināt un izmantot sociāli ekonomisko parādību analīzē, lieto otrreizējo grupēšanas metodi.

Otrreizējā grupēšana ir jaunu grupu veidošana, balstoties uz agrākajiem grupējumiem un neizmantojot šim nolūkam sākotnējo statistiskās novērošanas informāciju. Lai būtu iespējama jau sagrupētā materiāla proporcionāla pārveidošana, otrreizējā grupēšanā pieņem, ka novērošanas vienības ar dažādiem skaitliskiem lielumiem pētāmajā kopā sadalās vienmērīgi. Lieto divus jaunu grupu veidošanas paņēmienus:

- pirmais paņēmiens – **sākotnējo intervālu apvienošana**. To galvenokārt izmanto, lai pārietu no mazākiem intervāliem uz lielākiem intervāliem;
- otrais paņēmiens, saukts arī par **daļu pārgrupēšanu**, sastāv no jaunu grupu veidošanas. Tā pamatā ir noteiktas daļas kopas vienību ieskaitīšana katrā grupā.

2.1. tabulā parādīts otrreizējās grupēšanas pirmais paņēmiens, izmantojot nosacītus datus par peļņas apjomiem un uzņēmumu skaitu divu tautsaimniecības nozaru uzņēmumos.

2.1. tabula

Peļņas apjoms (EUR) un uzņēmumu skaits (vienības)

I nozare			II nozare		
Grupas Nr.	Peļņas apjoms, tūkst. EUR	Uzņēmumu skaits	Grupas Nr.	Peļņas apjoms, tūkst. EUR	Uzņēmumu skaits
1.	līdz 80	15	1.	līdz 50	13
2.	80—250	14	2.	250—500	46
3.	250—400	20	3.	500 un vairāk	1
4.	400—500	8	Kopā		60
5.	500 un vairāk	3			
Kopā		60			

Lai varētu analizēt abus grupējumus, vispirms intervāli un grupas jāpārveido, lai tie būtu salīdzināmi.

Pieņemsim, ka analīzes nolūkā ir jāizveido uzņēmumu skaits pēc peļņas apjoma atbilstoši grupējumam II nozarē.

Tā kā šajā gadījumā otrreizējā grupējuma pamatā ir tā pati pazīme, kas bija sākotnējā grupējumā, t. i., peļņas apjoms, tad otrreizējo grupējumu var veikt pēc pirmā paņēmiena – **tieši pārveidojot** (apvienojot) **sākotnējā grupējumā esošās grupas**.

Otrreizējā grupējuma pirmās grupas (līdz 250 tūkst. EUR) rādītājus aprēķina, summējot sākotnējā grupējuma pirmo divu grupu uzņēmumu skaitu ($15 + 14 = 29$ uzņēmumi).

Lai iegūtu otrreizējā grupējuma otrās grupas (250—500 tūkst. EUR) attiecīgos lielumus, apvieno trešās un ceturtās grupas uzņēmumu skaitu ($20 + 8 = 28$ uzņēmumi).

Piektās grupas dati (500 tūkst. EUR un vairāk) nav jāpārveido, bet pilnībā jāpārnes uz otrreizējā grupējuma trešo grupu.

2.2. tabula

Divu tautsaimniecības uzņēmumu otrreizējs grupējums, lietojot sākotnējā grupējumā esošo grupu tiešas pārveidošanas paņēmienu

I nozare			II nozare		
Grupas Nr.	Peļņas apjoms, tūkst. EUR	Uzņēmumu skaits	Grupas Nr.	Peļņas apjoms, tūkst. EUR	Uzņēmumu skaits
1.	līdz 250	29	1.	līdz 250	13
2.	250—500	28	2.	250—500	46
3.	500 un vairāk	3	3.	500 un vairāk	1
Kopā		60	Kopā		60

Sarežģītāks ir otrreizējās grupēšanas otrais paņēmiens – daļu pārgrupēšana. Piemērā izmantosim nosacītus datus par vidējo neto darba algu un nodarbināto struktūru divos uzņēmumos.

2.3. tabula

Vidējā neto darba alga (EUR) un nodarbināto struktūra (%)

1. uzņēmums			2. uzņēmums		
Grupas Nr.	Vidējā neto darba alga, EUR	Nodarbināto struktūra, %	Grupas Nr.	Vidējā neto darba alga, EUR	Nodarbināto struktūra, %
1.	500—600	16,3	1.	500—800	4,6
2.	600—1000	25,7	2.	800—1200	29,1
3.	1000—1300	21,8	3.	1200—1600	23,5
4.	1300—1500	19,4	4.	≤1600	5,8
5.	1500—1600	15,5	Kopā		100,0
6.	≤1600	1,3			
Kopā		100,0			

Kā redzams 2.3. tabulā, pirmajā uzņēmumā nodarbināto skaits sadalīts sešās grupās, otrajā – četrās grupās. Lai abu uzņēmumu dati būtu salīdzināmi, jāveic pirmā uzņēmuma datu pārgrupēšana atbilstoši otrā uzņēmuma grupējumam.

Redzams, ka otrreizējā grupējumā jāizveido četras nodarbināto grupas: pirmā ar 4,6 % nodarbināto, otrā ar 29,1 % nodarbināto, trešā ar 23,5 % nodarbināto un ceturtā ar 5,8 % nodarbināto.

Pirmā uzņēmuma 1. grupa (500—600 EUR) pilnībā ietilpst otrā uzņēmuma 1. grupā (500—800 EUR), bet pietrūkst vēl 200 EUR, kuri ir jāizņem no 2. grupas (600—1000 EUR). To aprēķina šādi:

$$\frac{25{,}7}{(1000-600)200}=12{,}9\ \%.$$

Iegūtais rezultāts ir jāpieskaita 1. grupas nodarbināto īpatsvaram:

$$16{,}3+12{,}9=29{,}2\ \%.$$

Pirmā uzņēmuma 2. grupā paliek:

$$25{,}7-12{,}9=12{,}8\ \%.$$

Otrā grupējuma 2. grupā ietilpst pirmā uzņēmuma 2. grupas 12,8 % un 3. grupā esošie 21,8 %. Tā kā darba algas intervālam jābūt no 800 EUR līdz 1200 EUR, tad 100 EUR ir lieki un tie jāpārceļ uz otrā grupējuma 3. grupu:

$$\frac{21{,}8}{\left(1300-1000\right)100}=7{,}3\ \%.$$

Tā rezultātā 3. grupā nodarbināto īpatsvars būs:

$$7{,}3+19{,}4+15{,}5=42{,}2\ \%.$$

4. grupā ietilpst pāri palikušie 1,3 %.

Lai aprēķini būtu pārskatāmāki un vieglāk saprotami, tos var aplūkot 2.4. tabulā.

2.4. tabula

Vidējā darba alga un nodarbināto struktūras otrreizējais vienotais grupējums

Grupas Nr.	Vidējā darba alga, EUR	Nodarbināto struktūra, %		Aprēķins
		1. uzņē-mums	2. uzņē-mums	
1.	500—800	4,6	29,2	$16,3+25,7/\left(1000-600\right)200=29,2$ %
2.	800—1200	29,1	27,3	$25,7-12,9+21,8/(1300-1000)100=27,3$ %
3.	1200—1600	23,5	42,2	$7,3+19,4+15,5=42,2$ %
4.	≤1600	5,8	1,3	1,3 %
Kopā		100,0	100,0	100 %

Pārbaudes jautājumi

1. Kādai informācijai ir jābūt, lai to varētu izmantot statistiskajos pētījumos?
2. Kādus novērošanas paņēmienus izmanto, lai iegūtu statistisko informāciju?
3. Kas ir statistiskā novērošana?
4. Kādām prasībām jāatbilst statistiskajiem novērojumiem?
5. Kādi var būt statistisko novērojumu veidi?
6. Kādas ir statistiskās novērošanas organizatoriskās formas?
7. Kas ir statistiskie pārskati?
8. Kas pārskatiem raksturīgs, un kā tos iedala?
9. Kādos veidos (grupās) iedala statistisko novērošanu?
10. Kas ir grupēšanas pamatā, un kāpēc tā ir nepieciešama?
11. Kā var klasificēt grupēšanas pazīmes?
12. Paskaidrojiet terminu “intervāls” un tā nozīmi!

Uzdevumi auditorijā

1. Lai izpētītu studentu viedokli par mācību procesa organizāciju augstskolā, ir jāveic speciāla aptauja. Definēt objektu un novērošanas vienību, novērošanas pazīmes, norādīt reģistrācijas regularitāti, veidu un novērošanas metodi. Izstrādāt novērošanas veidlapu un uzrakstīt īsu instrukciju par to, kā veidlapas aizpildīt. Sagatavot novērošanas organizatorisko plānu.
2. Studentu zināšanu pārbaude notika no 2. līdz 4. decembrim. Rezultāti, kas atspoguļo vērtējumu ballēs, tika saņemti dekanātā no visām mācību programmu grupām par katru studnetu katrā akadēmiskajā disciplīnā. Norādīt statistiskās novērošanas veidu, tās teritoriju, laiku, vai un kā var veikt monitoringu un datu vākšanu.
3. Izvēlieties optimālo statistiskās novērošanas veidu un metodes tās veikšanai,

pamatojiet savu izvēli:

a) pētījums par iedzīvotāju īpašumu ugunsdrošību pilsētas/novada centrā;
b) pētījums par ģimeņu privāto transportlīdzekļu nodrošinājumu pilsētas/novada centrā;
c) pētījums par studentu pieprasījumu pēc kultūras pasākumiem no 1. līdz 5. kursam;
d) pētījums, lai noteiktu galvenās problēmas mazo uzņēmumu attīstībai reģionos.

4. Aprakstīt vispiemērotāko novērošanas veidu un metodes, lai noteiktu ikdienas pasažieru plūsmu svārstības metro.

5. Lai noteiktu efektīvākos veidus svaigu dārzeņu piegādei tirdzniecības tīklā, dārzniecības uzņēmuma ekspeditori no 1. līdz 10. augustam veica produkcijas piegādes laika mērīšanu dažādos maršrutos ar dažādiem transportlīdzekļiem. Noteikt statistiskās novērošanas formu, veidu, metodes.

6. Dati par iedzīvotāju migrāciju daudzās valstīs tiek saņemti no iekšlietu struktūru "talonu/atļauju" statistikas uzskaites par iebraukšanu un izbraukšanu, kuri tiek noformēti kopā ar piereģistrēšanos dzīvesvietā vai tās anulēšanu. Noteikt statistiskās novērošanas formu, veidu un metodi.

7. Iedzīvotāju skaitīšana tika sākta 16. janvārī plkst. 00.00 un ilga 10 dienas. Norādiet novērošanas laiku un kritisko momentu.

8. Norādītajos variantos noteikt pētāmo objektu un novērošanas vienību, pamatot novērošanas veida izvēli:

a) pētīt valsts/pašvaldību piedāvāto sporta aktivitāšu nodrošinājumu iedzīvotājiem;
b) pētīt, kāds ir to studentu zināšanu līmenis, kuri mācību laikā piedalās *ERASMUS* apmaiņas programmās;
c) skaitīt iestādītos augļu kokus un ogu krūmus visā valstī dažādās īpašumu formās (privātie, valsts, kooperatīvi u. tml.).

9. Noteikt statistiskās grupēšanas veidu un pazīmes:

a) iedzīvotāju grupēšanas pēc dzimuma;
b) tautsaimniecībā nodarbināto iedzīvotāju grupēšana pēc ekonomikas nozares;
c) ēdināšanas uzņēmumu grupēšana pēc uzņēmējdarbības formas.

10. Doti dati par 24 studentu vecumu (gados):

20,1	21,4	20,5	20,0	19,6	22,3	21,0	22,6
20,2	19,0	19,6	23,0	22,0	19,8	20,3	22,1
19,0	19,8	21,2	21,9	22,3	23,1	19,9	22,2

Sagrupēt datus pēc studentu pilniem gadu skaitļiem, apkopot tos tabulā un izdarīt secinājumus.

11. Doti dati par iedzīvotāju piena produktu (t) pieprasījumu dažādos reģionos:
1424; 1574; 1494; 1624; 1674; 1683; 1700; 1751; 1809; 1859; 1875; 1815; 1865; 1737; 1786; 1643; 1560; 1676; 1598; 1453; 1347; 1101
Grupēt pēc izvēlētās pazīmes, veidojot četrus intervālus, izdarīt secinājumus.

Uzdevumi par statistisko grupēšanu

1. uzdevums. Doti dati (nosacīti) par 20 sabiedrībām ar ierobežotu atbildību.

Uzņēmumi	Nodarbināto skaits	Tajā skaitā		Darba samaksas fonds, EUR	Eksporta apjoms, EUR
		vīrieši	sievietes		
1.	15	7	8	4050	16 200
2.	22	16	6	4048	15 787
3.	7	5	2	1176	3880
4.	12	8	4	2184	9391
5.	30	23	7	8070	32 280
6.	45	30	15	11 025	55 125
7.	8	5	3	2760	10 764
8.	16	4	12	5952	26 188
9.	18	10	8	5724	29 140
10.	20	15	5	6720	37 200
11.	21	11	10	3948	18 082
12.	11	3	8	3157	10 400
13.	36	16	20	11 988	59 920
14.	31	20	11	8587	38 642
15.	27	14	13	8397	26 500
16.	24	17	7	6120	17 410
17.	9	5	4	3915	21 386
18.	14	3	11	6328	31 625
19.	10	8	2	3540	16 450
20.	6	1	5	2922	14 910
Kopā					

Aprēķināt:

1) kopējo nodarbināto skaitu, tajā skaitā nodarbināto vīriešu un sieviešu skaitu; darba samaksas fondu; eksporta produkcijas apjomu;
2) sagrupēt uzņēmumus piecās grupās pēc nodarbināto skaita. Noteikt intervāla garumu, pieņemot, ka visi intervāli ir vienāda garuma.

Katrā grupā aprēķināt:

a) uzņēmumu skaitu,

b) nodarbināto skaitu,

c) nodarbināto skaitu vidēji vienā uzņēmumā,

d) nodarbināto vīriešu skaitu,

e) nodarbināto sieviešu skaitu,

f) darba samaksas fondu,

g) eksporta produkcijas apjomu,

h) darba samaksu uz vienu nodarbināto (ar divām zīmēm aiz komata);

3) grupēt uzņēmumus pēc darba samaksas fonda četrās grupās. Noteikt intervāla garumu, pieņemot, ka visi intervāli ir vienāda garuma.

Katrā grupā aprēķināt:

a) nodarbināto kopējo skaitu,

b) vīriešu skaitu,

c) sieviešu skaitu,

d) darba samaksu uz vienu nodarbināto (ar divām zīmēm aiz komata);

4) grupēt uzņēmumus pēc eksporta produkcijas apjoma trīs grupās. Noteikt intervāla garumu, pieņemot, ka visi intervāli ir vienāda garuma.

Katrā grupā aprēķināt:

a) nodarbināto skaitu,

b) darba samaksas fondu,

c) eksporta produkcijas apjomu,

d) eksporta produkcijas apjomu uz vienu nodarbināto (ar vienu zīmi aiz komata).

2. uzdevums. Izmantojot 1. uzdevuma 2. punktā izdarīto grupēšanu pēc nodarbināto skaita, veikt otrreizējo grupēšanu, sadalot uzņēmumus trīs grupās. Pirmajā grupā apvienot uzņēmumus ar nodarbināto skaitu no 6 līdz 16 cilvēkiem, otrajā grupā – uzņēmumus ar nodarbināto skaitu no 16 līdz 30 cilvēkiem, trešajā grupā – no 30 līdz 45 cilvēkiem.

Katrā grupā aprēķināt:

a) uzņēmumu skaitu,

b) nodarbināto skaitu,

c) nodarbināto skaitu vienā uzņēmumā,

d) nodarbināto vīriešu skaitu,

e) nodarbināto sieviešu skaitu,
f) darba samaksas fondu,
g) eksporta produkcijas apjomu,
h) darba samaksu vidēji uz vienu nodarbināto (ar divām zīmēm aiz komata).

3. uzdevums. Doti dati par uzņēmumu skaitu un saražotās produkcijas apjomiem (nosacīti dati).

Produkcijas apjoms, tūkst. EUR	Uzņēmumu skaits
līdz 80	32
80—200	40
200—360	88
360—600	148
600—800	74
800 un vairāk	18
Kopā	400

Veikt otrreizējo grupēšanu, izveidojot šādas grupas:

Produkcijas apjoms, tūkst.	Uzņēmumu skaits
līdz 100	
100—200	
200—400	
400—600	
600 un vairāk	

4. uzdevums. Vīriešu un sieviešu vecuma struktūra N reģionā (nosacīti dati).

Vīrieši		Sievietes	
Vecuma grupa, gadi	% no kopējā vīriešu skaita	Vecuma grupa, gadi	% no kopējā sieviešu skaita
0—4	6,35	0—9	10,28
5—14	15,54	10—19	14,09
15—29	23,36	20—54	41,17
30—69	50,61	55—69	21,64
70 un vecāki	4,14	70 un vecāki	12,82
Kopā	100,00	Kopā	100,00

1. Veikt otrreizēju grupēšanu, lai salīdzinātu vīriešu un sieviešu vecuma struktūru (par grupēšanas pamatu izvēlēties vīriešu vecuma struktūru).
2. Aprēķināt sieviešu vecuma struktūras absolūto novirzi no vīriešu vecuma struktūras procentpunktos.

3. Aprēķināt sieviešu vecuma struktūru salīdzinājumā ar vīriešu vecuma struktūru procentos.

5. uzdevums. Izmantojot 4. uzdevumā dotos datus par vīriešu un sieviešu vecuma struktūru N reģionā:

1) veikt otrreizējo grupēšanu, lai salīdzinātu vīriešu un sieviešu vecuma struktūru (par grupēšanas pamatu izvēlēties sieviešu vecuma struktūru);
2) aprēķināt vīriešu vecuma struktūras absolūto novirzi no sieviešu vecuma struktūras procentpunktos;
3) aprēķināt vīriešu vecuma struktūru salīdzinājumā ar sieviešu vecuma struktūru procentos.

6. uzdevums. Tabulā doti dati par izglītības iestādēm divās pasaules pilsētās pēc studentu skaita. Veikt otrreizējo grupēšanu izveidojot četras jaunas grupas: ar studentu skaitu līdz 500, 501—2000, 2001—4000, 4001 un vairāk. Aprēķināt izglītības iestāžu skaitu (%) un studentu skaitu (%) katrā grupā. Analizēt rezultātus, izdarīt secinājumus!

Pilsēta A			Pilsēta B		
Izglītības iestādes grupētas pēc studējošo skaita (cilv).	Izglītības iestāžu skaits, %	Studējošo skaits, %	Izglītības iestādes grupētas pēc studējošo skaita (cilv).	Izglītības iestāžu skaits, %	Studējošo skaits, %
Līdz 100	43	7	Līdz 400	32	5
101—300	28	13	401—800	34	3
301—500	12	24	801—1600	11	12
501—1000	4	16	1601—2500	9	27
1001—2000	7	11	2501—4000	6	29
2001—5000	3	15	4001—5000	5	13
5001 un vairāk	3	14	5001 un vairāk	3	11
Kopā	100	100	Kopā	100	100

3. STATISTISKO DATU ATTĒLOŠANA

Lai statistiskā informācija būtu viegli un pārskatāmi uztverama, tādējādi palīdzot iegūtos datus arī labāk analizēt, tiek izmantotas dažādas statistisko datu attēlošanas metodes. Tomēr jāuzsver, ka statistisko datu attēlošanas procesā būtiski ir izveidot sadalījuma rindas.

3.1. Sadalījuma rindas būtība

Sadalījuma rindas veidojas grupēšanas rezultātā. Grupējot kopas vienības pēc vienas pazīmes, iegūst sadalījuma rindu. Sadalījums ir pētāmā kopuma īpašība.

Sadalījuma rinda ir statistiskās kopas vienību sadalījums pēc kādas skaitliski vai atributīvi variējošas pazīmes, piemēram, nodarbināto sadalījums pēc izglītības, profesijas, ieņemamā amata, darba samaksas, vecuma u. c. pazīmēm. Sadalījuma rindas izveidošanas mērķis ir pētāmās statistiskās kopas galveno īpašību un likumsakarību pētīšana.

Sadalījums – pētāmās statistiskās kopas īpašība, kuru raksturo kopas vienību skaita grupējums pēc kādas skaitliskas vai atributīvi variējošas pazīmes.

Variējošā pazīme – pazīme, kurai piemīt datu dažādība.

Ārējā izveidojuma ziņā sadalījuma rinda atgādina grupējumu, jo arī grupēšanā pētāmo vienību kopu pēc kādas būtiskas variējošas pazīmes sadala noteikta skaita grupās. Taču tie nav identiski jēdzieni. Atšķirībā no grupējuma, kura saturs var būt plašs pēc vajadzības, jebkura sadalījuma rinda sastāv tikai no **diviem elementiem**:

- **pazīmes skaitliskajām vai atributīvajām nozīmēm** (variantēm), pēc kurām sadala pētāmo kopu;
- norādēm par to, cik vienībām piemīt tā vai cita sadalītājpazīmes nozīme jeb cik liels ir **varianšu biežums**.

Variante ir pazīmes skaitliskais lielums. Sadalījuma variantēm var būt vai nu atributīvas, vai skaitliskas pazīmes atkarībā no tā, vai grupēšanas pamatā ir kvalitatīva vai kvantitatīva pazīme. Rezultātā izšķir divu veidu sadalījuma rindas:

- atributīvās,
- variācijas.

Sadalījuma rindas, kuras sakārtotas pēc **kvalitatīvās** pazīmes, sauc par **atributīvām** (piemēram, automašīnu sadalījums pēc to krāsas, mājsaimniecību iedalījums pēc galvenā pelnītāja u. c.). Sadalījuma rindas, kuras sakārtotas pēc **kvantitatīvās** pazīmes, sauc par **variācijas** sadalījuma rindām (piemēram, darba meklētāju sadalījums pēc vecuma, pensionāru sadalījums pēc pensijas lieluma u. c.).

Atkarībā no statistikas materiāla izvērsuma pakāpes iespējams veidot:

- diferencētas sadalījuma rindas,
- integrētas sadalījuma rindas,
- jauktas sadalījuma rindas.

Diferencētā sadalījuma rindā kā patstāvīgas parāda visas pētāmās pazīmes skaitliski vai atributīvi variējošās nozīmes, kādas fiksētas statistiskās novērošanas procesā. Tā, piemēram, izglītības statistikā, pētot specialitāšu izplatību, diferencētā atributīvā sadalījuma rindā kā variantes tiek uzrādītas visas specialitātes, kādas noteiktā periodā ir iespējams apgūt visās mācību iestādēs; demogrāfiskajā statistikā pēc iedzīvotāju skaitīšanas var izveidot diferencētu ekonomiski aktīvo iedzīvotāju sadalījuma rindu, kurā variantes ir visi vecumi u. c.

Ja pētāmās pazīmes varianšu skaits ir ļoti liels, izveidot diferencētu sadalījuma rindu nav lietderīgi, jo tā kļūst pārāk gara un tās tālākā analīze ir apgrūtinoša. Šādā gadījumā paplašina sadalījuma mērogu un veido **integrēto** sadalījuma rindu. Piemēram, par profesiju apgūšanu iespējams izveidot integrētu atributīvu sadalījuma rindu, par variantēm ņemot ne katru konkrētu profesiju, bet tipisku profesiju kopas (ekonomiskās, inženiertehniskās, būvniecības, medicīnas, lauksaimniecības u. c. profesijas).

Integrētā sadalījuma rinda koncentrētāk nekā diferencētā sadalījuma rinda izsaka pētāmā kopuma sastāvu, ir vieglāk uztverama, taču ar pārāk lielu varianšu integrējumu. Rezultātā šāda rinda kļūst ļoti vispārīga, nenoteikta un nepiemērota konkrētai analīzei.

Kā sava veida diferencētas un integrētas sadalījuma rindas apvienojums ir **jaukta sadalījuma rinda**, kurā diferencēti parāda analīzes ziņā galvenās un svarīgākās variantes, bet mazāk nozīmīgās apvieno (integrē). Tā, piemēram, tautas skaitīšanā Latvijā, sadalot visus iedzīvotājus pēc tautības, diferencēti tiek parādītas visu Latvijā dzīvojošo skaitliski lielāko tautību variantes (9), bet sadalījuma beigās tiek rādīta variante "citas tautības".

Pēc pētāmās pazīmes rakstura un varianšu izkārtojuma veida sadalījuma rindas iedala:
- diskrētās sadalījuma rindās,
- intervālu sadalījuma rindās.

Diskrētā sadalījuma rindā katrai variantei ir diskrēta, t. i., konkrēta, no citām šīs rindas variantēm atdalīta un atšķirīga nozīme.

Diskrētas pēc sava rakstura ir visas atributīvās sadalījuma rindas, turpretī variācijas sadalījuma rindas var tikt veidotas vai nu kā diskrētas, kad rindas variantes ir konkrēti (parasti veseli) skaitļi (piemēram, ģimeņu sadalījums pēc to lieluma), vai arī kā intervālu sadalījuma rindas, kad konkrētās variantes apvieno noteikta plašuma intervālos.

Intervālu sadalījuma rindā konkrētās variantes apvieno noteikta garuma vai plašuma intervālos. Intervālu sadalījuma rindas visbiežāk veido, kad sadalījuma pamatā ir nepārtraukta skaitliska pazīme, kuras variantēm noteiktās robežās var būt jebkura nozīme, un tāpēc izveidot diskrētu rindu būtībā nav iespējams. Taču dažreiz intervāla sadalījuma rindu veido arī diskrēti variējošas pazīmes, ja tās atšķirīgo varianšu skaits ir ļoti liels, piemēram, ja jāizveido rūpniecības, lauksaimniecības un citu tautsaimniecības nozaru uzņēmumu sadalījums pēc nodarbināto skaita.

Intervālu sadalījuma rindās to tālākas apstrādes aspektā visieteicamāk ir izveidot vienāda garuma intervālus. Taču daudzu sarežģītu parādību analīzē, nosakot intervālu garumu un skaitu, nevar rīkoties formāli. Jācenšas saglabāt pētāmās pazīmes variācijas īpatnības visā tās pārmaiņu apgabalā, tāpēc bieži vien sadalījuma rindā ir jāveido dažāda garuma intervāli, it sevišķi tad, ja sadalāmā kopa nav kvalitatīvi viendabīga.

Veiksmīgi izveidotā sadalījuma rindā parasti ir saskatāms noteikts vienību koncentrējums.

Sadalījuma rindas variantes parasti ir **pozitīvi skaitļi**, jo sabiedrisko parādību pazīmes, piemēram, ražošanas apjoms, darba samaksa, darba ražīgums u. c. pazīmes, nav negatīvi skaitļi.

Savdabīga nozīme ir **nulles variantei**, kura arī dažkārt nav iespējama (piemēram, cilvēku skaits ģimenē), bet kura daudzos gadījumos reāli pastāv un izsaka īpašu pētāmās pazīmes saturu. Tā, piemēram, izveidojot cilvēku sadalījumu pēc vecuma (nodzīvoto gadu skaita), nulles variante izteiks to cilvēku vecumu, kuri vēl nav nodzīvojuši līdz pilnam vienam gadam.

Ja statistikas dati nav sistematizēti, veidojas sākotnējā datu rinda. Ja pazīmju skaits ir ļoti liels, sākotnējā rinda kļūst grūti pārskatāma. Lai sākotnējā rinda būtu uztverama, variantes sadalījuma rindā jāsakārto **ranžēti**.

Ranžēšana ir statistiskās un cita veida informācijas sistematizēšanas paņēmiens, informācijas sakārtošana kvantitatīvā vai kvalitatīvā, nozīmīguma ziņā noteiktā kārtībā – parasti vai nu **augošā kārtībā** (tiešais ranžējums), vai **dilstošā kārtībā** (ačgārnais ranžējums). Ranžēts statistikas materiāls ir daudz labāk izprotams un norāda uz noteiktām likumsakarībām, kā arī sekmē likumsakarību atklāšanu gadījumos, kad tiek lietotas citas statistiskās vispārināšanas metodes un paņēmieni.

3.1. tabula

Realizētais svečturu daudzums mazumtirdzniecības uzņēmumā (nosacīti dati)

Svečtura veids	Realizētais svečturu skaits X	Ranžēta rinda			
		augošā kārtībā		dilstošā kārtībā	
Divžuburu	15	Divžuburu	15	Piecžuburu	244
Trīsžuburu	131	Četržuburu	48	Trīsžuburu	131
Četržuburu	48	Deviņžuburu	52	Septiņžuburu	90
Piecžuburu	244	Septiņžuburu	90	Deviņžuburu	52
Septiņžuburu	90	Trīsžuburu	131	Četržuburu	48
Deviņžuburu	52	Piecžuburu	244	Divžuburu	15
Kopā	580	Kopā	580	Kopā	580

Ja sadalījuma rindas variantēm ir skaitliskas nozīmes, ranžēšana grūtības nerada. Ja turpretī jāranžē atributīvas (kvalitatīvas) variantes, tad atkarībā no jautājuma nostādnes viens un tas pats sākotnējais materiāls var radīt dažādus atšķirīgus ranžējumus. Ranžējot atributīvas variantes, vispārīgā veidā ņem vērā šo varianšu sabiedrisko svarīgumu konkrētajos apstākļos, lai ranžējums atbilstu pētījuma mērķiem.

3.2. Sadalījuma rindu raksturojošie rādītāji

Galvenie sadalījuma rindu raksturojošie rādītāji ir:
- variančšu biežumi,
- intervālu blīvumi.

Variančšu biežumi var būt:
- absolūtie lielumi, kurus simboliski apzīmē ar burtu f;
- relatīvie lielumi, kurus simboliski apzīmē ar burtu w.

Absolūtie biežumi diskrētā sadalījuma rindā rāda, cik vienībām sadalāmajā kopā piemīt attiecīgā variantes nozīme. Variančšu biežumu summa ir vienāda ar pētāmās kopas vienību skaitu.

Relatīvos biežumus iegūst, konkrētas variantes absolūto biežumu dalot ar sadalījuma visu biežumu summu (kopas vienību skaitu):

$$w = \frac{f}{\sum f}.$$

Relatīvie biežumi rāda, kādai daļai jeb cik procentiem ($w\,\% = w \cdot 100$) no visām kopas vienībām piemīt uzrādītās variantes nozīme.

Intervālu sadalījuma rindā variančšu biežumu vietā rodas **intervālu biežumi**, kas izsaka, cik vienībām vai kādai daļai vienību sadalāmajā kopā piemīt visā attiecīgajā intervālā aptvertās variējošās pazīmes nozīmes.

Intervālu biežumi ir atkarīgi arī no intervāla garuma, tāpēc, analizējot un salīdzinot dažāda garuma intervālu sadalījumu rindā, līdz ar intervālu biežumiem aprēķina arī **intervālu blīvumus** ($f_{(b)}$ un $w_{(b)}$), kurus iegūst, dalot konkrēta intervāla absolūto biežumu (f) vai intervāla relatīvo biežumu (w) ar intervāla garumu (Δ).

Intervāla blīvums ir kopas vienību skaits uz vienu variējošas pazīmes intervāla garuma vienību.

Ir tiešie un uzkrātie biežumi. Varianšu **tiešie biežumi** (f vai w) izsaka kādas konkrētas variantes atkārtošanās reižu skaitu. Varianšu **uzkrātos biežumus** apzīmē ar S_f vai S_w. Tos iegūst, secīgi summējot (uzkrājot) līdz kādai variantei šīs variantes un visu iepriekšējo varianšu biežumus.

3.2. tabula

N uzņēmumā apkalpoto tūristu skaita vecuma struktūra (nosacīti dati)

Variantes, gadi x	Biežumi			
	tiešie		uzkrātie	
	absolūtie f	relatīvie w	absolūtie S_f	relatīvie S_w
20–24	280	9,14	280	9,14
25–29	418	13,64	698	22,78
30–34	522	17,04	1220	39,82
35–39	715	23,33	1935	63,15
40–49	604	19,71	2539	82,86
50–59	451	14,72	2990	97,58
60 un vairāk	74	2,42	3064	100
Kopā	3064	100	–	–

Uzkrātos absolūtos un relatīvos blīvumus aprēķina, uzkrātos biežumus dalot ar attiecīgajiem uzkrātajiem intervālu garumiem (plašumiem).

Uzkrātie biežumi tieša ranžējuma sadalījuma rindā raksturo, cik vienībām piemīt pazīmes nozīme, kas nav lielāka par tās variantes nozīmi, ar kuru saistīts attiecīgais uzkrātais biežums. **Uzkrātie blīvumi** savukārt rāda, cik kopuma vienību ir uz tāda (paplašināta) intervāla plašuma vienu vienību, kas veidots no variējošās pazīmes sākuma nozīmes līdz attiecīgā intervāla noslēdzošajai nozīmei.

Sadalījuma rindas, kuru izveidošanai izmanto faktiskos (tiešos) statistiskās novērošanas materiālus, sauc par **empīriskajām sadalījuma rindām** jeb par empīriskajiem sadalījumiem, kas statistikas praksē un publicējumos ir visparastākie un visplašāk sastopamie sadalījumi.

Matemātiskajā statistikā ir sastopamas arī **teorētiskās sadalījuma rindas** (teorētiskie sadalījumi), kuras veidojas empīrisko rindu matemātiskās pārveidošanas (apstrādes) rezultātā atbilstoši noteiktam algoritmam. Teorētiskajiem sadalījumiem ir liela nozīme ekonomisko procesu matemātiskajā modelēšanā.

3.3. Statistiskās tabulas

Statistiskie dati jāatspoguļo tā, lai tos varētu viegli izmantot. Pastāv trīs veidi, kā atspoguļot datus:

- ietvert tekstā,
- ievietot tabulā,
- izteikt grafiskā veidā.

Ja tekstā ievietots daudz skaitļu, tad tekstu un skaitļus ir grūti uztvert un iegaumēt.

Efektīvāks statistisko datu pasniegšanas veids ir tabulas. Statistiskās tabulas ir rindu un aiļu sistēma, kur noteiktā secībā un sakarībā tiek izvietota (izklāstīta) statistiskā informācija par sociāli ekonomiskām parādībām, procesiem un apkārtējo vidi.

Statistiskās tabulas ir statistisko pētījumu rezultātu racionāla izvietošanas forma, patstāvīga analīzes metode.

Tabulai ir savs priekšmets un izteicējs. **Tabulas priekšmets** ir tas, ko pēta un ko tabulā raksturo ar skaitliskiem lielumiem. **Tabulas izteicējs** ir rādītājs, kas raksturo tabulas priekšmetu un atklāj tā saturu. Izteicējs rodas, saskaitot un vispārinot novērošanā reģistrētos datus.

Tabulas priekšmets parasti ir izvietots **tabulas kreisajā pusē** – rindās; **izteicējs** izvietots **pa labi no priekšmeta** – ailēs. Var būt arī otrādi – atkarībā no analīzes uzdevumiem.

Katras tabulas obligāts elements ir **virsraksti** (kopējais virsraksts, rindu un aiļu virsraksti).

Atkarībā no tabulas priekšmeta uzbūves var būt trīs statistisko tabulu veidi: vienkāršās, grupu un kombinētās tabulas.

Vienkāršās tabulās priekšmets ir tabulā atspoguļotās parādības objektu saraksts bez to grupējuma. Tās ir plaši izplatītas daudzos ekonomiskos pētījumos. Pēc ievietotā materiāla rakstura tās var būt **teritoriālās** vai **hronoloģiskās** tabulas.

Vienkāršās tabulas makets:

Ārvalstu tiešās investīcijas sadalījumā pa valstīm

Valstis	Bāzes gads	Pārskata gads
A	1	2

Šīs vienkāršās tabulas dati raksturo ārvalstu investīciju apjomus un pārmaiņas laikā. Hronoloģiskās tabulas var veidot par dažādiem laika periodiem vai par situāciju kādā noteiktā datumā.

Grupu tabulās priekšmets ir tabulā atspoguļotās parādības vienkāršs grupējums (pēc vienas pazīmes).

Grupu tabulas makets:

Starpvalstu migrācijā iesaistīto migrantu sadalījums pēc vecuma

Vecums	Iebrauca	Izbrauca	Migrācijas saldo
A	1	2	3

Tabulas dati raksturo tiešu sakarību starp iebraukušo un izbraukušo cilvēku skaitu.

Tomēr grupu tabulas pilnībā neatrisina parādību daudzpusējas analīzes jautājumus. Šim mērķim izmanto **kombinētās tabulas,** kuru priekšmets ir kombinēts grupējums, kas tiek veikts vienlaikus pēc divām vai vairākām pazīmēm.

Kombinētās tabulas makets:

Iedzīvotāju migrācija

	Imigrācija			Emigrācija			Migrācijas saldo		
	kopā	tajā skaitā		kopā	tajā skaitā		kopā	tajā skaitā	
		ārvalstīs	Latvijā		ārvalstīs	Latvijā		ārvalstīs	Latvijā
Pavisam									
Pilsētās									
Republikas rajonos									

Ir izstrādāti tabulu pareizas veidošanas noteikumi.

1. Tabula nedrīkst būt pārāk liela un sarežģīta. Lietderīgāk ir vienas lielas sarežģītas tabulas vietā veidot divas vai vairākas mazākas tabulas.
2. Kopējam tabulas virsrakstam īsi jāatspoguļo tās galvenais saturs, laika periods, teritorija, mērvienības.
3. Tabulas rindu un aiļu virsraksti jāizvieto loģiskā secībā.
4. Tabulā jābūt aizpildītām visām rūtiņām, kas veidojas, ailēm un rindām krustojoties. Ja kādā rūtiņā nevar ierakstīt attiecīgos skaitļus, tā jāaizpilda ar kādu norādi. Bezskaitļu rūtiņās pieņemts lietot šādus apzīmējumus:
   - ja parādība nav novērota, rūtiņā liek svītriņu (–);
   - ja parādība ir novērota, bet tās lielums ir mazāks nekā puse no lietotās mērvienības, raksta vienu vai divas nulles (0; 0,0);
   - ja parādība ir, bet par to trūkst datu vai tie ir apšaubāmi, liek trīspunkti (…);
   - ja kādas rūtiņas aizpildīšana loģiski nav iespējama, raksta slīpu krustiņu (×);
   - ja dati ir precizēti, klāt liek rombiņu (♦).
5. Visas tabulas, vai vismaz katras ailes, ietvaros jāievēro vienāda precizitāte, piemēram, 0,1 vai 0,01 utt.
6. Ja daudzzīmju skaitļu ailēs nepieciešama liela precizitāte, ir lietderīgi ar nelielu atstarpi miljonus atdalīt no tūkstošiem, tūkstošus – no simtiem.

7. Zemteksta norāžu veidā tabulai jāpievieno attiecīgie paskaidrojumi, kas var būt kopēji visai tabulai vai arī attiekties uz kādu atsevišķu tabulas rādītāju. Ja tabulu ievieto kādā zinātniskā darbā vai rakstā, ir jāmin šīs tabulas datu avoti – vai tā ņemta no statistisko datu krājuma, vai no kāda zinātniska pētījuma, vai tā ir paša autora sastādīta. Norāde jāsāk ar vārdiem: "Aprēķināts pēc…", "Aprēķināts, izmantojot…" utt.

Statistisko tabulu analīzi sāk ar kopsummu analīzi, pēc tam izpēta atsevišķas rindas un ailes.

Tabulas analīzi iedala:
- struktūras analīzē,
- satura analīzē.

Struktūras analīze paredz tabulas uzbūves analīzi un tabulā attēlotās informācijas raksturojumu.

Satura analīze paredz tabulas iekšējā satura izpēti.

Pirms skaitliskās informācijas analīzes jāpārbauda tās ticamība un zinātniskā pamatotība, jāveic loģiskā un skaitliskā kontrole.

Atsevišķu pazīmju un grupu analīzi vēlams sākt ar absolūto rādītāju izpēti un to turpināt ar šiem rādītājiem saistīto relatīvo lielumu izpēti. Lai iegūtu pilnīgāku un uzskatāmāku priekšstatu par pētāmajiem procesiem un parādībām, veido statistiskos grafikus.

3.4. Statistiskie grafiki, to elementi

Grafisko metodi statistikā sāka izmantot vairāk nekā pirms 200 gadiem. Par grafiskās metodes pamatlicēju uzskata angļu ekonomistu V. Pleifēru (1731—1798), kurš savā darbā "Komercpolitiskais atlants" (1786) pirmo reizi statistiskos datus atspoguļoja ar grafisko metožu palīdzību (līniju, stabiņu, sektoru un diagrammu veidā).

Statistiskais grafiks ir rasējums, kurā ar ģeometrisku figūru palīdzību (līnijām, punktiem vai citām simboliskām zīmēm) attēlo statistiskos datus.

Statistiskie grafiki (grafiskā metode) ir statistisko tabulu turpinājums un papildinājums. Tas, kas var palikt nepamanīts, apskatot tabulu, atklājas grafiskajā attēlā. Tajā skaidri izpaužas pētāmās parādības attīstības tendence un ir labāk redzamas savstarpējās sakarības.

Grafiskie attēli:
- ir uzskatāmi, ļauj viegli uztvert attēlojamo parādību kopumā un saskatīt tās raksturīgākās pazīmes;
- rada iespēju noteikt parādību attīstības tendences;
- raksturo kopas struktūru;
- raksturo plāna (prognozes) izpildes pakāpi;

- rada iespēju novērtēt objektu ģeogrāfisko izvietojumu, atspoguļo parādības ģeogrāfiskās un teritoriālās likumsakarības;
- palīdz atklāt statistiskās novērošanas materiālos vai aprēķinos pieļautās kļūdas;
- ļauj ietaupīt lasītāja laiku, ja nav sīki jāiegaumē atsevišķi statistiski lielumi, bet jāzina tikai parādības saturs;
- ir ļoti ilustratīvi, tie piesaista, ieinteresē skatītāju;
- ir ērti lietojami statistiskos aprēķinos, piemēram, statistisko rindu interpolācijai vai ekstrapolācijai.

Grafiskie attēli nav universāla statistiskās analīzes metode. Kā jau iepriekš minēts, tie jāsaista ar statistiskajām tabulām un rindām. Šīs metodes cita citu papildina. Grafiskos attēlus lieto, lai attēlotu kopējo situāciju, bet ne detaļas. Tabulas uzrāda precīzus, bet ne pārskatāmus datus.

Grafisko attēlu veidošanā jāizpilda šādas prasības:

- atbilstoši izmantošanas **mērķim** jāizvēlas grafiskais attēls – grafiskā attēla veids;
- jānosaka **grafika laukums** – platība, kurā izveidotas ģeometriskās zīmes;
- jāuzrāda **mērogs** ar mēroga skalas palīdzību;
- jāizvēlas **koordinātu sistēma**, kura nepieciešama ģeometrisko zīmju izvietošanai grafika laukumā.

Svarīgākie grafisko attēlu elementi ir:

- grafika laukums,
- grafiskais atveids,
- telpiskie un mēroga mērījumi,
- grafiskā eksplikācija.

Grafika laukums	Grafiskais atveids	Telpiskie un mēroga mērījumi	Grafiskā eksplikācija
Vieta, kurā izpilda grafiku.	Simboliskas zīmes, ar kuru palīdzību attēlo statistiskos datus.	Nosaka grafisko atveidu izvietojumu grafika laukumā.	Visu palīglīdzekļu un norādījumu kopums, kas palīdz saprast attēlu.

Grafika laukumu raksturo tā formāts (malu izmēri un proporcijas). Pieņemts uzskatīt, ka skatītāju uztverei optimāls ir grafiks, kas izpildīts taisnstūra formas laukumā ar malu attiecību no 1 : 1,3 līdz 1 : 1,6.

Grafiskais atveids ir simboliskas zīmes, ar kuru palīdzību attēlo statistiskos datus. Tās ir daudzveidīgas: līnijas, punkti, ģeometriskas figūras (taisnstūri, kvadrāti, riņķi u. tml.), kā arī neģeometriskas figūras priekšmetu siluetu vai zīmējumu veidā. Vienus un tos pašus statistiskos datus var attēlot ar dažādu grafisko atveidu palīdzību.

Telpiskie orientieri nosaka grafisko atveidu izvietojumu grafika laukumā. Tos ieteicams ietvert koordinātu sistēmā. Ja grafisko attēlu zīmē saistīti ar taisnes skalām, to ietver taisnleņķa koordinātu sistēmā. Ja grafiskajam attēlam ir riņķa vai loka skala, to ietver polāro koordinātu sistēmā.

Statistisko grafiku mēroga orientieri piedod grafiskam atveidam skaitlisko nozīmi, kuru parāda ar mēroga skalas sistēmas palīdzību.

Skaitļu materiāla grafiskai attēlošanai izvēlas mērogu, pēc kura zīmē skalu.

Mērogs ir attiecība starp attēla lielumu un attēlojamā objekta lielumu. Par mērogu pieņem noteikta garuma nogriezni, piemēram, 1 centimetru uz skalas izsaka 1000 tonnu pārvadātās kravas utt.

Skala ir līnija, kuras atsevišķus punktus var lasīt kā noteiktus skaitļus. Katram punktam uz skalas atbilst noteikts skaitliskais lielums un otrādi.

Skalu veido trīs elementi:

- **līnija jeb skalas pamats**,
- uz šīs līnijas noteiktās vietās un secībā **atzīmētie punkti**,
- šo punktu **skaitliskie apzīmējumi**.

Atkarībā no skalas pamatu veidojošās **līnijas formas** izšķir:

- taisnes skalas;
- līknes skalas, ko savukārt iedala riņķa skalās un loka jeb pusriņķa skalās. (Riņķa un loka skalas parasti lieto, kad grafiski jāattēlo saliktas parādības vai objektu struktūra, kā arī tad, kad jāattēlo kāda procesa sadalīšanās noslēgtā laika periodā, piemēram, gada ietvaros.)

Atkarībā no atzīmēto **punktu stāvokļa** uz skalas lieto:

- vienmērīgas skalas,
- nevienmērīgas skalas.

Vienmērīgās skalas sauc par **aritmētiskajām skalām**, un uz tām atzīmēto punktu savstarpējie attālumi ir aritmētiski proporcionāli attēlojamo skaitļu starpībām. No **nevienmērīgajām skalām** svarīgākās ir **logaritmiskās skalas**, kurās attālumi starp diviem uz tās atzīmētiem punktiem ir proporcionāli attēlojamo skaitļu logaritmu starpībām.

Eksplikācija – visu palīglīdzekļu un norādījumu kopums, kas palīdz saprast attēlu.

Eksplikācijā ietilpst:

- attēlojamo lielumu mērvienību apzīmējumi,
- attēla kopējais nosaukums un tā atsevišķo daļu nosaukumi.

Grafiskā attēla nosaukums jāizvieto pēc tādiem pašiem noteikumiem kā tabulas virsraksti, bet tas **jānovieto zem attēla**. Grafiskā attēla nosaukumā norāda, kāds rādītājs ir attēlots, kādās mērvienībās, par kādu teritoriju un par kādu laika periodu tas aprēķināts. Eksplikācijā jābūt minētiem arī avotiem, kas izmantoti attēloto datu iegūšanai.

3.5. Statistisko grafiku veidi un klasifikācija

Statistikā izmantojamos grafiskos attēlus parasti klasificē pēc divām pazīmēm: attēla satura un attēlojuma formas.

Pēc **attēla satura**, respektīvi, grafiskās analīzes uzdevuma, grafiskie attēli:
- izsaka **parādības attīstību** laikā (dinamikas grafiskie attēli);
- raksturo **kopas sadalījumu**, izsaka sadalījuma likumsakarības un konkrētas īpatnības (sadalījuma rindu grafiskie attēli);
- raksturo **kopas struktūru** un struktūras pārmaiņas (struktūras grafiskie attēli);
- **salīdzina** dažādus **objektus** vai **parādības** (salīdzinājuma grafiskie attēli);
- izsaka **sabiedrisko parādību** savstarpējās **sakarības** (korelācijas grafiskie attēli);
- **raksturo** pētāmo parādību **teritoriālo izvietojumu** un teritoriālo intensitāti (teritoriālie grafiki);
- kontrolē **plāna izpildi** (plāna izpildes kontroles grafiskie attēli) u. c.

Pēc attēlojuma formas visus attēlus iedala atkarībā no tā, kādas ģeometriskas vai cita veida formas (punkti, līnijas, laukumi, figūras u. tml.) lietotas parādības grafiskajai attēlošanai. Statistikā plašāk lieto grafisko attēlu klasifikāciju pēc attēlojuma formas. Atkarībā no tās lieto trīs galvenos grafisko attēlu veidus:
- diagrammas,
- kartogrammas,
- statistiskās gleznas.

Diagrammas. Tajās statistiskos lielumus attēlo ģeometrisko formu veidā, turklāt to izmēriem jābūt proporcionāliem attēlojamo parādību lielumiem. Atkarībā no tā, kādi ģeometriskie elementi izmantoti diagrammā, ir:
- punktu diagrammas,
- līniju diagrammas,
- laukumu jeb plākšņu diagrammas,
- figūru diagrammas.

Punktu diagrammas. Tajās statistiskos lielumus attēlo ar punktiem, kuru skaits ir proporcionāls attēlojamās parādības apjomam. Tā, piemēram, ja viens punkts nosacīti apzīmē 100 automašīnu, tad 10 punkti apzīmē 1000 automašīnu utt. Diagrammas punktus izvieto uz plaknes noteikta lieluma laukumā vai arī kontūrkartē, punktus atbilstoši blīvējot plaknes attiecīgajās vietās. Piemēram, ar punktiem attēlo iedzīvotāju biezību, atsevišķu kultūraugu sējumu izplatību un citas parādības dažādos valsts apgabalos vai rajonos.

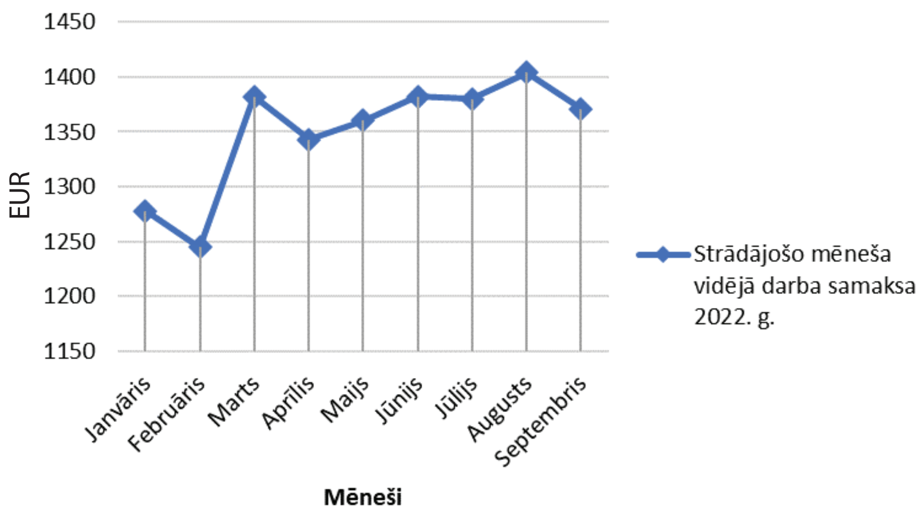
Līniju diagrammas ir viens no visizplatītākajiem diagrammu veidiem. Tās lieto, lai raksturotu:

- dinamiku, t. i., parādības izmaiņu novērojumu laikā,
- sadalījuma rindas variāciju,
- plāna (prognozes) uzdevuma izpildi,
- savstarpējo sakarību starp parādībām.

Līniju diagrammu paveidi ir:

- līkņu diagrammas,
- stabiņu diagrammas,
- lenšu diagrammas,
- laukumu vai plakņu diagrammas,
- figūru diagrammas.

Līkņu diagrammas. Tās izveido, ar taisnes nogriežņiem savienojot koordinātu sistēmā iezīmētos blakus esošos punktus. Parasti līkņu diagramma ir lauzta līnija, taču, aizvien palielinot grafikā atzīmēto un ar taisnes nogriežņiem savienojamo punktu skaitu, lauztā līnija pakāpeniski izlīdzinās un tuvojas taisnei. No tā arī cēlies šīs diagrammas nosaukums.



3.1. att. Strādājošo mēneša vidējā darba samaksa Latvijā 2022. g. janvārī—septembrī, EUR (pēc CSP datiem).

Lauzumiem un to leņķiem līkņu diagrammās ir sava patstāvīga nozīme – tie rāda un skatītāja uzmanību akcentē uz kustības virziena maiņu, kā arī uz šīs maiņas raksturu un stiprumu. Ir svarīgi tikai panākt, lai līknes diagrammā tiktu iezīmēti visi tie punkti un tajās vietās, kur reāli sākušās būtiskas pārmaiņas attēlojamās parādības attīstības virzienā un raksturā vai arī citi ar attēlojamo parādību un tās analīzi saistīti svarīgi notikumi.

Izveidojot līkņu diagrammas, jāievēro daži vispārīgi **noteikumi**:

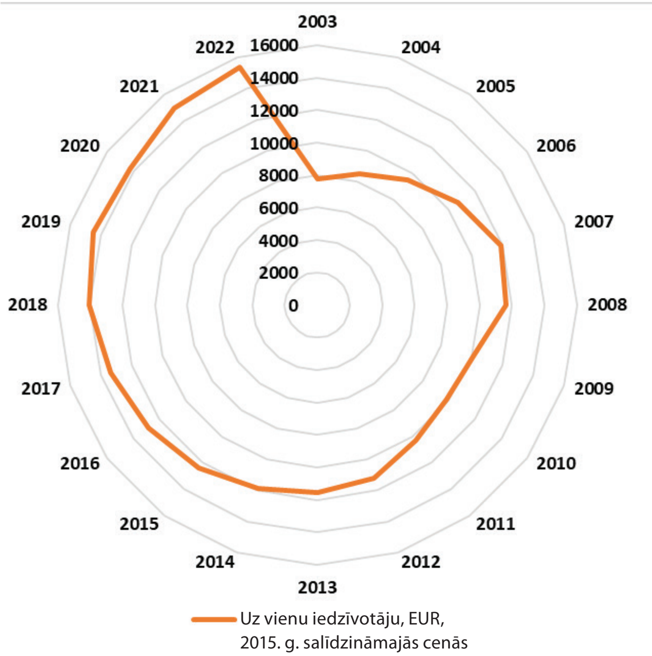
- pareiza un saskaņota **mērogu izvēle** uz abscisu un ordinātu ass;
- ar statistisko līkni var attēlot tikai **nepārtrauktus** vai **savstarpēji atkarīgus** lielumus, piemēram, lielumus, kas mainās laikā (dinamikas grafiskie attēli), vai arī lielumus, starp kuriem pastāv savstarpēja atkarība (korelācijas un sadalījumu rindu grafiskie attēli). Līkņu diagrammas nav piemērotas neatkarīgu lielumu grafiskai attēlošanai, piemēram, iedzīvotāju skaita salīdzināšanai dažādās pilsētās, valstīs;
- ja ar līkni attēlo kāda **procesa dinamiku**, jāpanāk, lai uz abscisu ass izveidotā laika skala būtu secīga, proporcionāla un nepārtraukta, jo laika gaitā, kā zināms, nav pārtraukumu. Ja par kādu no periodiem grafiski attēlojamās ziņas ir nepilnīgas vai to trūkst, uz horizontālās skalas var iezīmēt diagrammas pārtraukumu;
- ordinātu ass skalai dinamiku attēlojošās diagrammās vienmēr **jāsākas ar nullpunktu**. Atsevišķos gadījumos nullpunktu grafiskajā attēlā norāda tikai formāli, virs tā iezīmē vertikālās ass pārtraukumu un pēc tam sāk tālāku tās proporcionālu sadalīšanu ar skaitli, kas tikai nedaudz atšķiras no attēlojamās parādības minimālā lieluma;
- ja līkne attēlo ne tikai pozitīvus, bet arī negatīvus lielumus, grafiskais tīkliņš jāturpina arī **zem nulles līnijas**, kurai tādā gadījumā līkne ies pāri;
- vienā diagrammā var vienlaikus parādīt arī **vairākas savstarpēji saistītas līknes**. To vienlaicīga ietveršana diagrammā palielina tās analītisko vērtību. Taču jāņem vērā, ka liela līkņu skaita gadījumā, it sevišķi, ja tās cita citu krusto, grafiskā attēla lasīšana ir sarežģīta un traucēta.

Līkņu diagrammas paveidi ir:

- uzkrāto lielumu diagramma,
- radaru diagramma.

Uzkrāto lielumu diagrammas lieto dinamikas un plāna (prognozes) izpildes gaitas, kā arī kumulatīvo sadalījuma rindu grafiskai attēlošanai. Šāda veida diagrammās parasti vienlaikus attēlo gan pētāmās parādības tiešos lielumus, gan arī uzkrātos lielumus. Tāda, piemēram, ir diagramma, kura vienlaikus attēlo katrā mēnesī saražotās produkcijas daudzumu un produkcijas ražošanas vai plāna (prognozes) izpildes gaitu no gada sākuma līdz attiecīgajam mēnesim.

Radaru diagrammas. Izveidojot statistiskās līknes polārajā koordinātu sistēmā, attēlojamos lielumus atliek uz stariem, kas iziet no viena punkta, un uz blakus esošajiem stariem iezīmētos punktus savieno ar taisnēm. Šādā veidā iegūtu diagrammu sauc par radaru diagrammu.



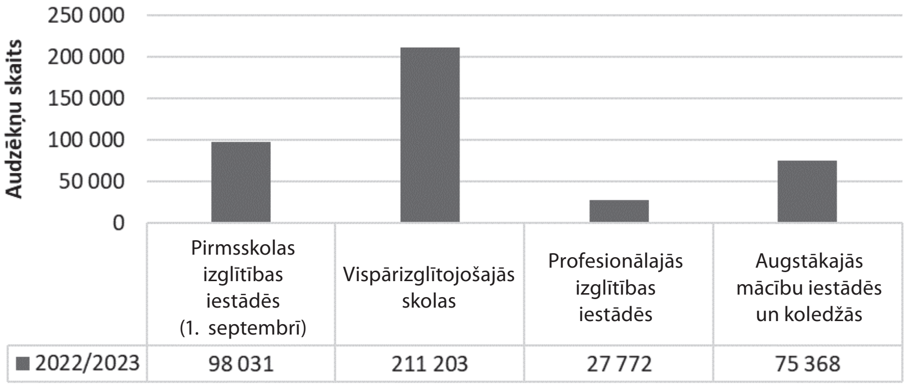
3.2. att. Latvijas IKP dinamika 2004.–2022. g. uz vienu iedz., EUR (pēc 2015. g. salīdzināmās cenās; pēc CSP datiem).

Radaru diagrammas parasti lieto parādības izmaiņu attēlošanai kādā slēgtā ciklā, piemēram, gada atsevišķos mēnešos, nedēļas dienās, diennakts stundās utt. Radaru diagrammas noder arī sezonālo svārstību grafiskai attēlošanai.

Konstruējot radaru diagrammas, par nullpunktu jeb abscisu parasti ņem staru krustošanās punktu, attēla centru, un attēlojamos lielumus pēc noteikta mēroga atliek uz stariem, kuri noder par ordinātām, no centra uz āru.

Stabiņu diagrammas. Sociāli ekonomisko parādību, plāna izpildes novērtējuma un sadalījuma rindas variācijas raksturošanai var izmantot arī stabiņu diagrammas, kas ir līniju diagrammu paveids. Gan līniju, gan stabiņu diagrammās attēlojamos lielumus salīdzina tikai pēc vienas dimensijas – līnijas vai stabiņa garuma (augstuma). To platumam nav statistiski izzinošas nozīmes.

Ja stabiņus diagrammā atliek no ordinātu ass un tos zīmē horizontālā virzienā, tad iegūst **lenšu diagrammu**. Stabiņu un lenšu diagrammas statistikā lieto galvenokārt attēlojamo objektu apjomu salīdzināšanai. Ja stabiņos vai lentēs iezīmē objektu struktūrvienībām proporcionālas daļas, tad šīs diagrammas var lietot arī struktūras grafiskai attēlošanai. Šādā gadījumā salīdzināmos lielumus, attēlojot tos stabiņos un lentēs, ir lietderīgi zīmēt vienāda garuma, lai atšķirības to absolūtajos izmēros netraucētu uztvert pētāmo objektu sastāva atšķirības. Īpašu lenšu diagrammas veidu lieto, lai attēlotu parādības dažāda rakstura (pozitīvas un negatīvas) izmaiņas. Šādas diagrammas var izmantot, piemēram, lai attēlotu uzņēmumus, kuros palielinājušies vai samazinājušies ražošanas apjomi utt.



3.3. att. Audzēkņu skaits izglītības iestādēs Latvijā 2022./2023. māc. g. (pēc CSP datiem).

Laukumu jeb plakņu diagrammas. Tās ir jo sevišķi noderīgas pastāvīgu parādību (neatkarīgu lielumu) salīdzināšanai pēc apjoma, teritoriāli un citādi vai arī saliktas parādības struktūras (sastāva) grafiskai attēlošanai. Tās zīmē ģeometrisku figūru veidā, kuru laukumi ir proporcionāli attēlojamo parādību lielumiem.

Raksturīgākie laukumu diagrammas paveidi ir kvadrātu un apļu diagrammas.

Kvadrātu diagrammās statistiskos datus attēlo ar kvadrātiem, kuru **laukumi** ir **proporcionāli attēlojamiem lielumiem**. Lai uzzīmētu kvadrātus, kuru laukumi ir proporcionāli attēlojamiem lielumiem, vispirms no šiem laukumiem jāaprēķina kvadrātsakne un atbilstoši iegūtajiem skaitļiem jāzīmē kvadrātu malu garumi. Ja ar kvadrātu diagrammām vienlaikus attēlo vairākas parādības, kuras secīgi ietilpst cita citā, var izveidot **ietverto kvadrātu diagrammas**.

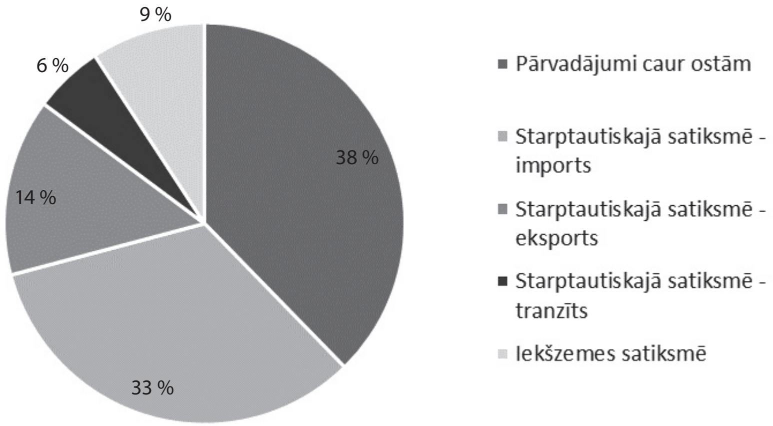
Laukumu diagrammu izveidošanai dažkārt izmanto arī **taisnstūrus** vai **trīsstūrus**. Šajā gadījumā minēto ģeometrisko figūru laukumiem, tāpat kā kvadrātu un apļu diagrammās, jābūt proporcionāliem attēlojamajiem lielumiem. Taču, lai palielinātu attēloto taisnstūru uztveršanas un salīdzināšanas iespējas, visiem viena attēla taisnstūriem vienu malu parasti zīmē vienāda garuma, bet otru malu – proporcionālu attēlojamiem lielumiem. Līdzīgi rīkojas, veidojot trīsstūra diagrammas. Visus vienā grafiskajā attēlā ietvertos trīsstūrus konstruē tā, lai to pamati būtu vienādi, bet augstumi – proporcionāli attēlojamiem lielumiem. Statistiskās izziņas aspektā šādi izveidotās taisnstūru un trīsstūru diagrammas praktiski neatšķiras no stabiņu vai lenšu diagrammām.

Apļu diagrammās statistiskos lielumus attēlo salīdzināmu apļu laukumu veidā. To panāk, ņemot apļu rādiusus, kas ir proporcionāli kvadrāta saknei no attēlojamajiem lielumiem. Ja ar apļu diagrammām vienlaikus attēlo vairākas parādības, kas secīgi ietilpst cita citā, tad analogi ietverto kvadrātu diagrammām var zīmēt **ietverto apļu diagrammas**.

Sadalot apļu laukumus sektoros, izveido **sektoru diagrammas**, kuras lieto kopas struktūras grafiskai attēlošanai. Lai aprēķinātu attiecīgo sektoru centra leņķus, procentos izteiktus kopas sastāvdaļu īpatsvarus reizina ar 1 % atbilstošo grādu skaitu – 3,6°.

Statistikā plaši lieto diagrammas, kas būtībā ir **līniju** (līkņu) un **laukumu diagrammu apvienojums**. Pie šādām diagrammām pieder:

- slokšņu diagrammas,
- diferenču diagrammas,
- siluetu diagrammas,
- Varzara zīmju diagrammas.



3.4. att. Kravu pārvadājumi pa dzelzceļu Latvijā 2022. g. 3. ceturksnī, tūkst. t (pēc CSP datiem).

Slokšņu diagrammas veidā var vienlaikus attēlot saliktas parādības kopapjoma un struktūras pārmaiņas laikā. Katras kopas sastāvdaļas lielumu šajā diagrammā attēlo ar sloksni, tās dažādi iekrāso vai iesvītro. **Pirmā sloksne** izveidojas starp abscisu asi un līniju, kas savieno punktus, kuri atbilst attiecīgās sastāvdaļas lielumiem atbilstošajām ordinātām attēlojamos laika periodos. **Otrai sloksnei** par sākumu ņem pirmās sloksnes ordinātu galapunktus, no kuriem velk līnijas uz augšu, atliekot attiecīgu ordinātas garumu utt. Tādējādi izveidojas tik daudz slokšņu, cik ir kopas sastāvdaļu.

Diferenču diagrammas uzdevums ir attēlot **starpības**, kas rodas starp divu savstarpēji saistītu rindu lielumiem. Tā, piemēram, diferenču diagrammas veidā var attēlot iedzīvotāju mehāniskā pieauguma dinamiku, kas veidojas kā starpība starp iebraukušo un izbraukušo iedzīvotāju skaitu. Diferenču diagrammā abām attēlojamās starpības veidojošām rindām jābūt ar vienu un to pašu pamatvienību, turklāt tās jāatzīmē uz aritmētiskās skalas pēc viena un tā paša mēroga.

Siluetu diagrammā jeb ēnu diagrammā attēlo kādas parādības **svārstības ap** tās **vidējo vai normālo lielumu**, ko pieņem par bāzi. Laukumu starp bāzes līniju un līkni iekrāso vai iesvītro. Šādā veidā grafiski var attēlot, piemēram, gada **sezonālās svārstības**, par bāzi (100 %) pieņemot gada vidējo līmeni, bet katra mēneša faktisko apjomu atliekot uz augšu vai leju no bāzes līnijas.

Procentu kvadrāts ir kvadrātu un stabiņu diagrammas apvienojums, kas attēlo **saliktas kopas struktūru vienlaikus pēc divām pazīmēm**. Procentu kvadrāts ir noderīgs kombinētā grupējuma grafiskai attēlošanai. Izveidojot procentu kvadrātu, vienu no kvadrāta malām (horizontālo) izmanto par asi kombinētā grupējumā pirmās pazīmes relatīvo mēroga vienību iezīmēšanai (no 0 % līdz 100 %), bet uz kvadrāta vertikālās malas attiecīgi atliek kombinētā grupējuma otrās pazīmes relatīvās mēroga vienības. Kopas sadalījumu grupās, t. i., tās struktūru, pēc pirmās pazīmes izsaka uz kvadrāta horizontālās malas balstīto un dažādi iekrāsoto stabiņu platumi, bet katras grupas tālāku sadalīšanu apakšgrupās pēc otrās pazīmes izsaka stabiņos iezīmētās un iesvītrotās sastāvdaļas.

Savdabīgs līniju un laukuma diagrammu apvienojums ir **Varzara zīmju diagramma**, kas nosaukta par godu krievu statistiķim V. J. Varzaram, kurš ierosināja izmantot taisnstūra figūru, lai attēlotu trīs rādītājus, no kuriem viens rādītājs ir divu pārējo rādītāju reizinājums. Diagramma sastāv no vairākiem taisnstūriem, no kuriem katrs attiecas uz dažādiem objektiem vai arī uz vienu un to pašu objektu dažādos laikos. Taču atšķirībā no parastajām taisnstūru diagrammām, kur visiem attiecīgajā grafiskajā attēlā ietvertajiem taisnstūriem vienu malu (pamatni) zīmē vienāda garuma, Varzara zīmju diagrammās mainīgas un patstāvīgu izzinošu informāciju saturošas ir abas taisnstūra malas, kā arī tā laukums. Tāpēc arī ar šo diagrammu grafiski vienlaikus var attēlot savstarpēji saistītas parādības, no kurām divas ir pēc savas dabas faktoriālas parādības (viena – ekstensīvā faktora; otra – intensīvā faktora), bet trešā – ar šīm faktoriālajām parādībām saistītā rezultatīvā parādība. Tā lauksaimniecības statistikā savstarpēji saistītas parādības ir, piemēram, kartupeļu stādīšanas platība (ekstensīvā), ražība (intensīvā) un kopraža (rezultatīvā), turklāt aprēķinos kopraža ir vienāda ar stādīšanas platības un ražības reizinājumu. Šos rādītājus var kompleksi attēlot ar taisnstūri, kura viena mala izsaka sējumu platību, bet otra mala izsaka ražību. Šī taisnstūra laukums ir proporcionāls trešajam rādītājam – kopražai. Šādi izveidotu taisnstūri sauc par Varzara zīmju diagrammu. Veidojot Varzara zīmju diagrammu, jāievēro arī daži vispāratzīti tehniski noteikumi – proti, ar taisnstūra pamatni parasti izsaka ekstensīvās pazīmes lielumu, bet ar taisnstūra augstumu – intensīvās pazīmes lielumu.

Figūru diagrammas. Tajās skaitliskos lielumus attēlo ģeometrisku figūru veidā, un to **tilpumi ir proporcionāli** attēlojamiem lielumiem. Figūru diagrammu parastākie veidi ir kubu, prizmu, ložu, cilindru un citas diagrammas. Uztvert salīdzināmo lielumu faktiskos samērus figūru diagrammās ir vēl grūtāk nekā līniju vai laukumu diagrammās. Tāpēc statistiskajā analīzē tās lieto reti.

Kartogrammas. Kartogrammās jeb statistiskajās kartēs grafiski attēlo pētāmās parādības **ģeogrāfisko izvietojumu** (uz kontūrkartes vai shēmas), par izteiksmes līdzekļiem izmanto svītrojumus vai krāsojumus, kuru biezība (satumšinājums) mainās atbilstoši attēlojamās parādības intensitātei attiecīgajā teritorijā. Šajā nolūkā visu attēlojamās pazīmes variācijas apgabalu sadala nosacītās intensitātes grupās (parasti trīs līdz piecās grupās), katrai grupai piešķirot atbilstošu svītrojumu vai krāsojuma niansi. Vienas parādības dažādu intensitātes pakāpju izteikšanai nav jālieto atšķirīgas krāsas, bet gan vienas krāsas dažādus toņus. Gaišāka toņa krāsa nozīmē parādības mazāku intensitāti, bet tumšāka krāsa – novērojamās parādības lielāku intensitāti. Kartogrammās var attēlot tikai parādības relatīvos un vidējos lielumus. Absolūtos lielumus nevar attēlot tāpēc, ka to dažādību lielā mērā nosaka salīdzināmo teritoriālo parādību atšķirības.

Kartodiagrammas. Ja kartogrammās papildus svītrojumiem (krāsojumiem) vai neatkarīgi no tiem iezīmē dažāda veida diagrammas (stabiņu, kvadrātu, apļu u. c. diagrammas), rodas kartodiagrammas. Kartodiagrammas piemērs ir ģeogrāfiskā kontūrkarte – tajās pilsētas atzīmētas ar dažāda lieluma apļiem, kuru laukumi ir proporcionāli iedzīvotāju skaitam.

Statistiskās gleznas. No citiem grafiskajiem attēliem ārēji atšķirīgas un savdabīgas ir statistiskās gleznas jeb piktogrammas – tās lieto galvenokārt **statistisko datu popularizēšanai**, par attēliem izvēloties simbolus (zīmējumus), kas raksturīgi attēlojamai parādībai (piemēram, zivis – nozvejas daudzuma izteikšanai). Parādības lielumus statistiskās gleznās attēlo, zīmējot proporcionāli lielākas vai mazākas figūras vai arī dažādu skaitu vienāda lieluma figūru. Plašām iedzīvotāju masām un propagandas vajadzībām domātajos izdevumos grafiskos attēlus dažkārt nevis izveido uz balta pamata, bet izvieto uz kāda zīmējumu (gleznojumu) saturoša fona, kam ir vispārpopulārs sakars ar attēlojamo parādību un kas tādējādi rada grafiskā attēla lasītājiem atbilstošu noskaņojumu.

Pārbaudes jautājumi

1. Kā var atspoguļot statistiskos datus?
2. Kas ir tabulas priekšmets un izteicējs?
3. Kādi ir tabulu pareizas veidošanas noteikumi, kas jāievēro?
4. Kāpēc izmanto statistiskos grafikus?
5. Kādi ir grafisko attēlu elementi?
6. Kā iedala attēlus pēc attēlojuma formas?

Uzdevumi

1. uzdevums. Izveidot tabulu un grafiskos attēlus (dažāda veida) par Latvijas eksportu un importu laika periodā no 2005. gada līdz 2015. gadam un noformēt tos atbilstoši statistikas prasībām.

2. uzdevums. Doti dati par celtniecības brigādēm (EUR mēn.).

Rādītāji	Brigādes Nr.							
	1	2	3	4	5	6	7	8
Darba apjoms, tūkst. EUR	819	1296	1340	1008	1468	1772	720	1904
Darbinieku skaits, cilv.	16	24	25	21	27	32	15	34

Lai noteiktu sakarību starp darba slodzi un darbinieku skaitu, ko nodarbina darba ņēmējs būvniecības brigādēs, veikt analītisko grupēšanu un datus apkopot tabulā un grafikā. Izdarīt secinājumus.

3. uzdevums. Doti dati par uzņēmumu peļņu pārskata gadā tūkst. EUR. Aprēķināt dotos datus procentos, tos atspoguļot tabulā un grafikā (kumulātā). Izdarīt secinājumus.

Uzņēmumu pārskata gada peļņa, tūkst. EUR	20,5	28,5	20,8	20,4	22,5	18,2	13,9	16,5
Uzņēmumu skaits	3	5	4	8	6	10	2	2

4. uzdevums. Loģistikas uzņēmumu raksturo šādi kravu pārvadājumu dati: 2015. g. – 2238,9 (tūkst. t) 2016. g. – 2175,8; 2017. g. – 2485,5, tai skaitā pastāvīgie klienti (uz līgumu pamata) – attiecīgi 1308,0; 1025,5; 1390,7 tūkst. t. Attēlot datus, izvēloties dažādus statistisko datu attēlošanas veidus!

5. uzdevums. Tabulā apkopoti nosacīti dati par kādas teritorijas iedzīvotājiem (tūkst.). Izlabojiet kļūdas, kas pieļautas tabulas veidošanā, izveidojot jaunu tabulu!

Iedzīvotāju kategorija	Precējušies	Neprecējušies	Kopā	Atraitnes/ņi	Šķirteņi
Iedzīvotāju skaits kopā	74,0	13,6	100	4,0	8,4
t. sk.					
vīrieši	77,9	15,6	100	1,3	5,2
sievietes	69,9	11,6	100	6,8	11,7
Bezdarbnieki kopā	54,7	30,0	100	3,2	12,1
t. sk.					
vīrieši	52,6	34,6	100	1,3	11,5
sievietes	57,0	25,1	100	5,2	12,7

6. uzdevums. Tabulā doti dati par ražošanas uzņēmuma saražoto vienību skaitu pa gadiem. Izvēlieties piemērotāko grafiku, lai attēlotu tabulā esošo informāciju un izdariet secinājumus!

Dati par uzņēmumu	2002. g.	2007. g.	2012. g.	2017. g.
Produkcijas apjoms (vien.)	1270	1510	445	850
t. sk.				
galdi	458	488	151	270
krēsli	269	385	61	119
skapji	543	637	233	461

4. STATISTIKAS RĀDĪTĀJI

Statistikas rādītāji ir sociāli ekonomisko procesu un parādību skaitliskie raksturotāji. Statistiskie rādītāji raksturo pētāmās parādības stāvokli un attīstību, sabiedrībā notiekošo attīstības procesu virzību un intensitāti.

4.1. Statistikas rādītāju būtība

Statistikas rādītāji ir lielumi, kas adekvāti raksturo attēlojamās parādības konkrētas vietas un laika apstākļus (**adekvāts** – vienāds, līdzvērtīgs, pilnīgi atbilstošs).

Statistiskā rādītāja struktūru veido:

- **kvalitatīvā** puse (objekts, tā īpašības, kategorija),
- **kvantitatīvā** puse (lielums un mērvienība),
- **objekta** teritoriālās, nozaru vai citas robežas,
- **laika** intervāls vai moments.

Tā kā statistiskais rādītājs ir pētāmo parādību vai procesu īpašību atspoguļojums, tad tas ir to izziņas līdzeklis. Taču jebkuras zināšanas vienmēr ir ierobežotas un nepilnīgi atbilst pētāmajam objektam. Neviens statistikas rādītājs, ne arī vesela to sistēma nevar atspoguļot visas īpašības, visas objekta īpatnības un pat ne daļu šo īpašību ar absolūtu precizitāti.

Katram skaidrs, ka, piemēram, lauksaimniecībā nav iespējams pilnīgi precīzi izmērīt novākto graudaugu, cukurbiešu daudzumu bez dažādiem piemaisījumiem (smilts, augsnes daļiņu, nezāļu u. c.). Nevar izvairīties arī no svēršanas, mērījuma, ziņu pārraides kļūdām.

Nav noslēpums, ka pastāv arī apzināta datu kropļošana – pierakstīšana un uzrādīšana mazākos vai lielākos apjomos.

Tā kā par statistikas izpētes objektiem var būt visdažādākās parādības un objekti, tad arī statistisko rādītāju daudzveidība ir ļoti liela.

Parādības un procesi, kurus pēta statistika, ir pietiekami sarežģīti, un to būtību nevar atspoguļot tikai ar vienu atsevišķu rādītāju. Šādos gadījumos izmanto statistisko rādītāju sistēmu.

Statistisko rādītāju sistēma ir savstarpēji saistītu rādītāju kopums, kurai ir vienlīmeņa vai daudzlīmeņu struktūra un kura ir virzīta uz konkrētu statistisko uzdevumu risināšanu.

Visus statistiskos rādītājus var iedalīt divās lielās grupās:

- individuālie rādītāji,
- kopsavilkuma rādītāji.

Pēc **izteiksmes formas** statistiskos rādītājus iedala:

- absolūtos rādītājos,

- relatīvos rādītājos,
- vidējos rādītājos.

Statistiskos rādītājus var grupēt arī **pēc laika faktora**. Sociāli ekonomiskās parādības un procesi atspoguļojas statistiskos rādītājos pēc stāvokļa:

- **noteiktā laika momentā** – noteiktā datumā, mēneša sākumā vai beigās, gada sākumā vai beigās (iedzīvotāju skaits, uzkrātās ārvalstu investīcijas u. c.);
- **par noteiktu laika periodu** – dienu, nedēļu, mēnesi, ceturksni, gadu (produkcijas apjoms, eksports, imports, iekšzemes kopprodukta apjoms u. c.).

Pirmajā gadījumā rādītājus sauc par **momenta** rādītājiem, otrajā gadījumā – par **intervāla** rādītājiem.

No **teritoriālās noteiktības** aspekta statistiskos rādītājus iedala:

- **vispārteritoriālos** rādītājos, kuri raksturo pētāmo objektu vai parādību valstī kopumā;
- **reģionālos** rādītājos;
- **vietējos** rādītājos, kuri raksturo kādu teritorijas daļu vai atsevišķu objektu.

Statistiskos rādītājus vēl arī iedala:

- **uzskaites–novērtējuma** rādītājos, kuri atspoguļo pētāmās parādības apjomu un līmeni;
- **analītiskos** rādītājos, kurus izmanto, lai raksturotu parādību attīstības īpatnības, izplatību un savstarpējo saistību ar citām parādībām.

Par analītiskajiem rādītājiem izmanto vidējos lielumus, struktūras rādītājus, variācijas, dinamikas, korelācijas un citus rādītājus.

Statistisko rādītāju un to sistēmu galvenās funkcijas ir:

- izziņas informatīvā funkcija. Sociāli ekonomisko parādību un apkārtējās vides likumsakarības nav iespējams izpētīt bez statistiskās informācijas izmantošanas;
- prognozēšanas funkcija. Statistisko rādītāju loma nākotnes prognozēšanā ir cieši saistīta ar to informatīvo funkciju, turklāt prognozēšanas funkcija nepiemīt visiem statistiskajiem rādītājiem, bet gan tikai tiem, kurus izmanto masveida procesu modelēšanā;
- novērtēšanas funkcija. Uz statistisko rādītāju pamata iedzīvotāji, sabiedrība, valsts u. c. novērtē uzņēmumu, organizāciju, valdības darbu. Krievu statistiķis, pirmais statistikas mācību grāmatas autors K. Germans rakstīja: "Statistiķis ir publiskais sliktā un labā vēstnieks un valdības kontrolieris." Pēc atsevišķi ņemta rādītāja, piemēram, zemas inflācijas, ārējās tirdzniecības saldo u. c., nevar spriest par tautsaimniecības veiksmīgu attīstību;
- reklāmas un propagandas funkcija. Tirgus ekonomikas apstākļos reklāma

ir normāla parādība, un līdz ar to uzņēmumi, iestādes cenšas izmantot statistikas rādītājus par produkcijas kvalitāti, lietošanas ilgumu u. c. savā reklāmā, zinot, ka cilvēki vairāk tic skaitļiem, nevis vārdiem. Tādēļ pret reklāmā izmantotajiem statistiskajiem rādītājiem jāizturas ļoti uzmanīgi. Ja iespējams, jāveic papildu aprēķini un analīze. Tikpat uzmanīgi jāizturas pret tiem statistikas rādītājiem, kurus politiskās partijas izmanto vēlēšanu priekšvakarā.

Jāatzīmē, ka ne vienmēr statistiskais rādītājs ir nosaukts skaitlis. Tas var būt arī abstrakts skaitlis, bez mērvienības, izteikts skaitļa 1 daļās (koeficientos), procentos, promilēs u. c.

4.2. Absolūtie lielumi

Jebkuras sabiedriskās parādības statistiskais raksturojums sākotnēji izpaužas tādu absolūtu lielumu veidā, kuri raksturo pētāmo parādību un procesu absolūtos izmērus: masu, laukumu, apjomu, izplatību konkrētās laika robežās un vietā.

Absolūtie lielumi ir rādītāji, kas izsaka pētāmo objektu un parādību tiešos apjomus, piemēram, transportlīdzekļu skaitu, eksporta apjomu u. c. Absolūtie lielumi ir statistisko datu pamatforma, un tiem vienmēr ir kāda noteikta mērvienība.

Ir individuālie un summārie absolūtie lielumi. **Individuālie absolūtie lielumi** izsaka kopuma atsevišķām vienībām piemītošo pētāmās pazīmes lielumu, piemēram, viena ierēdņa darba algas lielumu, importa apjomu no Spānijas, vienā uzņēmumā saražoto produkcijas daudzumu utt. Individuālos lielumus izmanto, lai uzkrātu sākotnējo statistisko informāciju, taču tie nerada statistiskās likumsakarības.

Summārie absolūtie lielumi ir individuālo lielumu apkopojums. Ar summārajiem lielumiem raksturo tautas saimniecību kopumā vai arī tās atsevišķu nozaru rādītājus, piemēram, ārējās tirdzniecības apgrozījumu, kopējo bezdarbnieku skaitu, transporta nozarē saražoto produkciju u. c.

Statistikā lietojamie absolūtie lielumi izsaka konkrētu parādību apjomus. Mērvienība ir statistisko rādītāju obligāta sastāvdaļa, ar kuru tie atšķiras no abstraktajiem skaitļiem.

Absolūtos lielumus var izteikt dažādās mērvienībās, no kurām raksturīgākās ir naturālās, naudas (vērtības) un darba mērvienības.

Naturālās mērvienības atbilst lietu un parādību dabiskajām īpašībām un to sabiedriskās izmantošanas raksturam (skaits, masa, tilpums, jauda u. c.). Parasti katru absolūto lielumu izsaka ar vienu mērvienību, bet, ja pētāmai parādībai ir vairākas būtiskas pazīmes, vienlaikus lieto divas vai vairākas mērvienības. Piemēram, dzinējus uzskaita gan pēc skaita, gan jaudas; audumus uzskaita tekošos metros un kvadrātmetros utt.

Ja parādība veidojas vairāku faktoru vienlaicīgas darbības rezultātā, tās lielumu izsaka **saliktās mērvienībās**. Piemēram, kravu pārvadājumus izsaka miljontonnkilometros (kravas daudzuma un attāluma reizinājums).

Naudas mērvienības ļauj samērot naturālās formas un lietošanas ziņā atšķirīgas lietas, kā arī tās apvienot un aprēķināt kopsummas. Ir parādības, kuru absolūtos apjomus var izteikt tikai naudas (vērtības) izteiksmē. Tas galvenokārt attiecas uz tautsaimniecības sintētiskajiem rādītājiem – iekšzemes kopproduktu, noguldījumu apjomu, ražošanas apjomu, peļņas apjomu u. c.

Darba mērvienības raksturo darba patēriņu cilvēkstundās, cilvēkdienās, ar nodarbināto skaitu un citām mērvienībām.

Absolūtos lielumus var mērīt ar dažādu precizitātes pakāpi, piemēram, apdzīvoto vietu iedzīvotājus – cilvēkos; pa valsti kopumā – tūkstošos vai miljonos cilvēku.

Kaut gan absolūtiem lielumiem ir svarīga praktiska nozīme parādību izpētē, tomēr faktu analīzē nepieciešami dažāda veida salīdzinājumi. Rezultātā absolūtie rādītāji, kuri raksturo tās vai citas parādības, tiek aplūkoti salīdzinājumā ar citiem rādītājiem, kurus pieņem par salīdzinājuma bāzi. Statistisko rādītāju salīdzināšana notiek dažādās formās un virzienos, lietojot relatīvos lielumus.

4.3. Relatīvie lielumi, to veidi

Relatīvie lielumi izsaka lietu un parādību skaitliskās attiecības un raksturo parādības līmeni. Tie vienmēr ir divu lielumu attiecība – **relācija**. Skaitītājā ir pētāmā parādība, saucējā ir rādītājs, ar kuru salīdzina, t. i., salīdzināšanas bāze. Relatīvo lielumu metode ļauj atsegt, izmērīt, novērtēt un salīdzināt parādību un procesu **kvalitatīvo saturu**.

Relatīvajiem lielumiem piemīt lielāka stabilitāte nekā tādiem pašiem absolūtajiem rādītājiem. Relatīvie lielumi ir uzskatāmi un viegli iegaumējami. Tie visvairāk atbilst parādību attīstības ātruma mērīšanai un raksturošanai. Bez relatīvajiem rādītājiem nevar:

- izmērīt pētāmās parādības **sastāvu**;
- izmērīt pētāmās parādības **attīstības intensitāti laikā**;
- novērtēt vienas parādības **attīstības līmeni** uz citas, ar to savstarpēji saistītas parādības fona;
- veikt **teritoriālo salīdzināšanu**, tostarp starptautiskā līmenī.

Relatīvo lielumu aprēķināšanā būtiska nozīme ir pareizas bāzes izvēlei, jo tā saistās ar salīdzināmības problēmu.

Lai relatīvos lielumus varētu lietot analīzē, jāievēro šādi svarīgi **noteikumi**:

- relatīvo lielumu bāzei jābūt stabilai. Tas nozīmē, ka jāapskata periods, kad parādība notikusi normālos, parastos apstākļos;

- lielumiem, kurus pretstata, jābūt savstarpēji saistītiem pēc būtības;
- jāņem vērā sezonālās parādības (kūdras ieguve, mālu sagatavošana ķieģeļu rūpnīcās u. tml.);
- jānodrošina teritoriālās pakļautības salīdzināmība;
- jānodrošina atbilstošas mērvienības, cenu līmenis, naudas pirktspēja, valūtas kursi u. c.

Relatīvos lielumus var izteikt:

- koeficientos,
- procentos,
- promilēs,
- prodecimilēs.

Vistiešāk divu elementu attiecību izsaka **koeficients**. Tas rāda, cik reižu salīdzināmais lielums (daļas skaitītājs) ir lielāks par bāzes (daļas saucējs) lielumu vai, ja koeficients ir mazāks par vienu, kādu daļu tas sastāda no bāzes lieluma.

Reizinot koeficientu ar 100, relatīvo lielumu izsaka **procentos** (%), kas ir visizplatītākā relatīvo lielumu izteiksmes forma.

Reizinot koeficientu ar 1000, relatīvo lielumu izsaka **promilēs** (‰).

Reizinot koeficientu ar 10 000, relatīvo lielumu izsaka **prodecimilēs** (‱).

Izvēloties kādas relācijas izteiksmi, cenšas iegūt konkrētā relatīvā lieluma visuzskatāmāko un analīzei vispiemērotāko formu. Praktiski izvēle atkarīga no tā, cik liela ir daļas skaitītāja un saucēja **skaitliskā atšķirība**. Ja daļas skaitītāja lielums ievērojami pārsniedz bāzes lielumu, ieteicams par relatīvā lieluma izteiksmes formu lietot **koeficientu**.

Ja abi šie lielumi atšķiras nedaudz, vispiemērotākā relācijas forma ir **procents**. Ja turpretī daļas skaitītājs ir ievērojami mazāks nekā saucējs, visuzskatāmāk relatīvais lielums izpaužas **promilēs** vai **prodecimilēs**.

Mainot relatīvā lieluma izteiksmes formu, nemainās faktiskais pretstatāmo lielumu relatīvais samērs. Tā, piemēram, koeficients 1,745 nozīmē tādu pašu relāciju kā 174,5 %, 1745 ‰, 17 450 ‱ vai 1,7 reizes.

Jebkurš par salīdzinājuma bāzi pieņemtās parādības absolūtais apjoms vienmēr relatīvi atbilst attiecīgās **relācijas izteiksmes standartam**, t. i., skaitlim 1,0, ja relācija izteikta koeficienta formā; skaitlim 100 %, ja relācija izteikta procentos; skaitlim 1000 ‰, ja relācija izteikta promilēs; skaitlim 10 000 ‱, ja relācija izteikta prodecimilēs.

Svarīgākie un statistikā visplašāk lietojamie relatīvie lielumi ir šādi:

- dinamikas relatīvie lielumi,
- prognozes (plāna) uzdevuma relatīvie lielumi, prognozes izpildes relatīvie lielumi,
- struktūras relatīvie lielumi,
- koordinācijas relatīvie lielumi,

- salīdzinājuma relatīvie lielumi,
- intensitātes relatīvie lielumi.

Dinamikas relatīvie lielumi izsaka sabiedrisko parādību attīstību laikā. Tos aprēķina, dalot faktiski sasniegto līmeni pārskata periodā ar šī paša rādītāja līmeni bāzes periodā.

Ja šādu līmeni izsaka kā koeficientu, to sauc par **augšanas koeficientu**; ja izsaka procentos, to sauc par **augšanas tempu**.

$$\boxed{\begin{matrix}\textit{augšanas}\\ \textit{koeficients}\end{matrix}} \cdot 100 = \boxed{\begin{matrix}\textit{augšanas}\\ \textit{temps}, \%\end{matrix}}.$$

Dinamikas relatīvos lielumus sauc arī par attīstības tempiem. Pilno relāciju, kā jau minēts iepriekš, sauc par **augšanas tempu**, bet dinamikas relatīvā lieluma papildinātāju, kuru aprēķina, atņemot no procentos izteiktā augšanas tempa 100 %, sauc par **pieauguma tempu**.

Pieauguma temps rāda, par cik procentiem palielinājies vai samazinājies pētāmās parādības līmenis pārskata periodā, salīdzinot ar bāzes periodu. Atšķirībā no augšanas tempiem pieauguma tempi var būt arī negatīvi lielumi.

$$\boxed{\begin{matrix}\textit{augšanas}\\ \textit{temps}, \%\end{matrix}} - 100\,\% = \boxed{\begin{matrix}\textit{pieauguma}\\ \textit{temps}, \%\end{matrix}}.$$

Piemērs.

Latvijas iekšzemes kopprodukta apjoms 2022. gada I ceturksnī bija 6447,80 milj. EUR, 2022. gada IV ceturksnī 7778,81 milj. EUR (salīdzināmās cenās).

Var aprēķināt, ka dinamikas relatīvais lielums ir

$$\frac{6447{,}80}{7778{,}81} = 0{,}828 \cdot 100 = 82{,}8\ \%.$$

Tas nozīmē, ka IKP apjoms 2022. gada IV ceturksnī, salīdzinot ar 2022. gada I ceturksni, samazinājies par 17,2 % (82,8 % – 100,0 %).

Piemērs.

Mirušo skaits Latvijā 2022. gadā bija 30 731 cilvēks, 2021. gadā – 34 600 cilvēku.

Dinamikas relatīvais lielums:

$$\frac{30\ 731}{34\ 600} = 0{,}888 \cdot 100 = 88{,}8\ \%.$$

Tātad mirušo skaits samazinājies par 11,2 % (88,8 % – 100 %).

Analizējot sabiedrisko parādību pārmaiņu laikā, dažreiz labākas uzskatāmības nolūkā aprēķina **nosacītās dinamikas rādītājus**, kurus iegūst, dalot parādības līmeni bāzes periodā ar tās pašas parādības līmeni pārskata periodā.

Nosacītās dinamikas relatīvais lielums raksturo, cik reižu pētāmās parādības līmenis bāzes periodā bijis zemāks vai augstāks par pārskata periodā sasniegto līmeni.

Pēc iepriekšējā piemēra var aprēķināt, ka mirušo skaits Latvijā 2021. gadā bija 1,125 reizes lielāks nekā 2022. gadā (34600 / 30731).

Tātad 2021. gadā mirušo skaits Latvijā bija par 12,5 % lielāks nekā 2022. gadā ($1{,}125 \cdot 100 - 100 = 12{,}5$ %).

Tā ir viena no dinamikas relatīvo lielumu un arī dažu citu relatīvo rādītāju īpatnībām, kas jāievēro, analizējot un novērtējot attiecīgos statistiskos rādītājus.

Prognozes uzdevuma un prognozes izpildes relatīvie lielumi. Šos rādītājus plaši lieto tirgus ekonomikas apstākļos. Prognozes relatīvais lielums rāda, cik reižu un par cik procentiem prognozē palielināt vai samazināt attiecīgo rādītāju.

Prognozes relatīvo lielumu aprēķina, attiecinot parādības prognozēto līmeni pret bāzes perioda līmeni.

Prognozes izpildes relatīvo lielumu aprēķina, dalot parādības faktisko līmeni ar prognozēto līmeni.

Piemērs (nosacīti dati).

Latvijas eksporta apjoms uz N valsti bāzes gadā bija 528 tūkst. EUR. Pārskata gadā prognozēja palielināt eksportu par 63 tūkst. EUR. Faktiskais eksporta apjoms pārskata gadā bija 544 tūkst. EUR.

Var aprēķināt, ka prognozes uzdevuma relatīvais lielums ir

$$\frac{(528+63)}{528} = 1{,}119 \cdot 100 = 111{,}9\ \%.$$

Tātad eksporta apjomu prognozēja palielināt par 11,9 % ($111{,}9\ \% - 100\ \%$).

Prognozes izpildes relatīvais lielums ir:

$$\frac{544}{591} = 0{,}920 \cdot 100 = 92{,}0\ \%.$$

Pēc aprēķina redzams, ka prognoze nav izpildīta par 8 % ($92{,}0\ \% - 100{,}0\ \%$).

Starp aplūkotajiem rādītājiem ir šāda savstarpēja sakarība:

$$\boxed{\begin{matrix}\textit{augšanas koeficients}\\ \text{(dinamikas relatīvais lielums)}\end{matrix}} = \boxed{\begin{matrix}\textit{prognozes}\\ \textit{uzdevums}\end{matrix}} \cdot \boxed{\begin{matrix}\textit{prognozes}\\ \textit{izpilde}\end{matrix}}$$

Pēc analizētā piemēra augšanas temps (dinamikas relatīvais lielums) ir:

$$\frac{544}{528} = 1{,}030 \cdot 100 = 103{,}0\ \%.$$

Sakarības pārbaude:

$$1{,}030 = 1{,}119 \cdot 0{,}920.$$

Šo rādītāju savstarpējā sakarība dod iespēju aprēķināt trešo rādītāju, ja ir zināmi abi pārējie rādītāji:

$$\boxed{\textit{prognozes uzdevuma relatīvais lielums}} = \frac{\boxed{\textit{augšanas temps}}}{\boxed{\textit{prognozes izpildes relatīvais lielums}}}$$

$$1{,}119 = \frac{1{,}030}{0{,}920};$$

$$\boxed{\textit{prognozes izpildes relatīvais lielums}} = \frac{\boxed{\textit{augšanas temps}}}{\boxed{\textit{prognozes uzdevuma relatīvais lielums}}}$$

$$0{,}920 = \frac{1{,}030}{1{,}119}.$$

Savstarpējās sakarības starp absolūtajiem un relatīvajiem lielumiem rada iespēju aprēķināt nepieciešamo absolūto lielumu, piemēram:

$$\boxed{\textit{pētāmās parādības līmenis pārskata periodā}} = \boxed{\textit{pētāmās parādības līmenis bāzes periodā}} \cdot \boxed{\textit{augšanas koeficients}}$$

$$\boxed{\textit{prognozes uzdevums pārskata periodā}} = \boxed{\textit{pētāmās parādības līmenis bāzes periodā}} \cdot \boxed{\textit{prognozes uzdevuma relatīvais lielums}}$$

$$\boxed{\textit{pētāmās parādības līmenis pārskata periodā}} = \boxed{\textit{prognozes uzdevums pārskata periodā}} \cdot \boxed{\textit{prognozes izpildes relatīvais lielums}}$$

Praksē bieži gadās aprēķināt prognozes izpildes relatīvo lielumu rādītājiem, kuri jau ir relatīvie lielumi, t. i., ir izteikti procentos.

Ja tiek prognozēts esošā līmeņa **paaugstinājums**, to aprēķina, dalot pārskata perioda faktisko līmeni ar prognozēto līmeni.

Piemēram, uzņēmums prognozēja produkcijas un pakalpojumu apjomu pārskata gadā palielināt par 1,8 %. Faktiski produkcijas un pakalpojumu apjoms palielinājās par 2,4 %.

Prognozes izpilde procentos: $(102{,}4 / 101{,}8)100 = 100{,}6\ \%$.

Ja turpretī tiek prognozēts esošā līmeņa relatīvs **pazeminājums**, rīkojas otrādi: prognozēto līmeni dala ar pārskata perioda līmeni.

Piemēram, pārskata periodā uzņēmums prognozēja nodarbināto skaitu samazināt par 0,8 %. Faktiskais samazinājums bija 1,7 %.

Prognozes izpilde procentos: $(99{,}2 / 98{,}3)100 = 100{,}9\ \%$.

Prognozes izpildes pakāpi parasti aprēķina ar precizitāti līdz procenta desmitdaļai (0,1 %), bet, ja prognozes izpilde ir intervālā no 99,0 % līdz 100 % (piemēram, 99,86 %), precizitāti paaugstina līdz procenta simtdaļai (0,01 %). Nav pieļaujama noapaļošana līdz pilniem 100,0 %.

Reizēm dinamikas, prognožu uzdevuma un prognozes izpildes lielumu aprēķina, lietojot pieaugošās summas (kumulācijas) metodi. **Kumulācija** – palielināšana.

Piemēram, uzņēmuma peļņas apjoma dinamikas novērtējumu procentos aprēķina pēc datiem, kas ir pieaugoša peļņas summa no pārskata gada sākuma un pieaugoša peļņas summa no bāzes gada sākuma.

Augšanas koeficientu aprēķina pēc formulas

$$T = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_i^1}{\sum_{i=1}^{n} P_i^0},$$

kur P_i^1 un P_i^0 – peļņas apjoms pa mēnešiem attiecīgi pārskata un bāzes gadā.

Piemēram, iegūtās peļņas augšanas koeficientu I ceturksnī aprēķina:

$$\boxed{T_{I\ cet.}} = \frac{\boxed{\begin{matrix}\textit{peļņas ap-}\\ \textit{joms janvārī}\end{matrix}} + \boxed{\begin{matrix}\textit{peļņas ap-}\\ \textit{joms februārī}\end{matrix}} + \boxed{\begin{matrix}\textit{peļņas ap-}\\ \textit{joms martā}\end{matrix}} \quad \begin{matrix}\textit{pārskata}\\ \textit{gadā}\end{matrix}}{\boxed{\begin{matrix}\textit{peļņas ap-}\\ \textit{joms janvārī}\end{matrix}} + \boxed{\begin{matrix}\textit{peļņas ap-}\\ \textit{joms februārī}\end{matrix}} + \boxed{\begin{matrix}\textit{peļņas ap-}\\ \textit{joms martā}\end{matrix}} \quad \begin{matrix}\textit{bāzes}\\ \textit{gadā}\end{matrix}}$$

Kumulatīvo metodi var lietot arī citu sociālo un ekonomisko parādību analīzē.

Struktūras relatīvie lielumi. Struktūra ir viena no svarīgākajām statistiskās kopas īpašībām. Kopas struktūras un tās pārmaiņu noskaidrošana ir statistiskās analīzes sākuma posms. Kopas struktūrai ir liela nozīme ne tikai esošo rezultātu noskaidrošanā, bet arī parādības attīstības prognozēšanā.

Struktūra – statistiskās kopas sastāvdaļu savstarpējs izvietojums un sakarība. Struktūras relatīvos lielumus aprēķina no **sagrupētiem datiem**, un tie raksturo pētāmās parādības atsevišķu daļu īpatsvaru šīs pašas parādības kopapjomā.

Struktūras relatīvos lielumus aprēķina, dalot pētāmās parādības atsevišķu elementu absolūtos lielumus ar šīs pašas parādības kopapjomu.

Parasti struktūras relatīvos lielumus izsaka procentos. Summējot kopuma visu daļu relatīvos lielumus, iegūst 100 %, kas relatīvā izteiksmē atbilst parādības kopapjomam.

Piemērs.

4.1. tabula

Saražotie tekstilizstrādājumi N uzņēmumā pārskata gadā (nosacīti dati)

Izstrādājumu veidi	Saražotie apjomi, tūkst. EUR	Aprēķinātā struktūra, %
Vilnas dzija	408,7	12,76
Kokvilnas diegi	684,4	21,37
Trikotāžas audumi	967,5	30,21
Trikotāžas apģērbi	1142,2	35,66
Kopā	3202,8	100,00

Struktūras aprēķini:

$$\boxed{\begin{matrix}\textit{Vilnas}\\ \textit{dzija}\end{matrix}} = \frac{408{,}7}{3202{,}8} \cdot 100 = 12{,}76\ \%,$$

$$\boxed{\begin{matrix}\textit{Kokvilnas}\\ \textit{diegi}\end{matrix}} = \frac{684{,}4}{3202{,}8} \cdot 100 = 21{,}37\ \%,$$

$$\boxed{\begin{matrix}\textit{Trikotāžas}\\ \textit{audumi}\end{matrix}} = \frac{967{,}5}{3202{,}8} \cdot 100 = 30{,}21\ \%,$$

$$\boxed{\begin{matrix}\textit{Trikotāžas}\\ \textit{apģērbi}\end{matrix}} = \frac{1142{,}2}{3202{,}8} \cdot 100 = 35{,}66\ \%.$$

Ja struktūras relatīvie lielumi ir pēc satura saistīti, nedublē cits citu un ir aprēķināti attiecībā pret vienu un to pašu bāzi, tos var summēt, tādējādi iegūstot jaunus, paplašinātus analogus satura struktūras relatīvos lielumus. Summējot visu daļu šāda veida struktūras relatīvos lielumus, iegūst 1,0 jeb 100 %, kas relatīvā izteiksmē atbilst parādības kopapjomam.

Struktūras relatīvos lielumus var iedalīt **vienpakāpes** un **daudzpakāpju struktūras relatīvajos lielumos**. Šāda struktūras relatīvo lielumu klasifikācija saistīta ar kombinēto grupēšanu, kad pētāmo kopumu sākotnēji sadala grupās pēc vienas pazīmes, pēc tam iegūtās grupas pēc kādas citas pazīmes sadala apakšgrupās, kuras savukārt sadala apakšgrupās utt. Rezultātā katrs no apakšgrupu lielumiem ietilpst gan visu pēc apjoma plašāku apakšgrupu sastāvā, gan arī visa kopuma sastāvā.

Piemērs.

Vairumtirdzniecības bāzē esošo dārzeņu un augļu daudzums pārskata gada sākumā bija 128,0 tonnas, tajā skaitā dārzeņi 74,0 tonnas, no kurām 51,0 tonna bija kāposti, no kuriem savukārt puķkāposti – 6,0 tonnas. Izsakot šos absolūtos lielumus struktūras relatīvajos lielumos, var rīkoties divējādi.

1. Par salīdzinājuma bāzi var ņemt kopējo dārzeņu un augļu apjomu un aprēķināt, ka dārzeņu īpatsvars kopējā apjomā ir $(74{,}0/128{,}0)100 = 57{,}8\ \%$, savukārt kāpostu īpatsvars ir $(51{,}0/128{,}0)100 = 39{,}8\ \%$ un puķkāpostu – $(6{,}0/128{,}0)100 = 4{,}7\ \%$.
   Šādi relatīvie lielumi ir **vienpakāpes struktūras lielumi**, jo to bāze ir pētāmās parādības kopapjoms, t. i., 128,0 tonnas dārzeņu un augļu.
2. Var aprēķināt, kāds ir kāpostu īpatsvars nevis dārzeņu un augļu kopapjomā, bet gan dārzeņu apjomā: $(51{,}0/74{,}0)100 = 68{,}9\ \%$. Iegūtais lielums 68,9 % pēc izziņas rakstura ir **daudzpakāpju** (konkrēti – divpakāpju) **struktūras lielums**, jo tā aprēķināšanas bāze pati par sevi ir kopuma sastāvdaļa. Struktūras relatīvo lielumu pakāpju skaits var būt dažāds. Turpinot piemēru, var aprēķināt, ka puķkāpostu īpatsvars kāpostu kopapjomā ir: $(6{,}0/51{,}0)100 = 11{,}8\ \%$.

Iegūtais rādītājs atbilst trešās pakāpes struktūras relatīvajam lielumam.

Gan vienpakāpes, gan daudzpakāpju struktūras relatīvajiem lielumiem ir sava patstāvīga loma kopuma sastāva analīzē. Tos saista noteikta matemātiska sakarība. Secīgi reizinot daudzpakāpju struktūras relatīvos lielumus, var aprēķināt attiecīgos vienpakāpes struktūras relatīvos lielumus. Dalot kādu no vienpakāpes struktūras relatīvajiem lielumiem ar citu pirms tā esošo vienpakāpes struktūras relatīvo lielumu, iespējams aprēķināt attiecīgo daudzpakāpju struktūras relatīvo lielumu. Tā, piemēram, izdalot divus vienpakāpes struktūras relatīvos lielumus – puķkāpostu īpatsvaru visā dārzeņu un augļu kopapjomā (4,7 %) ar kāpostu īpatsvaru visā dārzeņu un augļu kopapjomā (39,8 %) –, iegūst jau pazīstamo daudzpakāpju struktūras relatīvo lielumu $11{,}8\ \% = \left(4{,}7 / 39{,}8\right)100$.

Koordinācijas relatīvie lielumi raksturo attiecību starp vienas kopas divām sastāvdaļām.

Koordinācijas relatīvos lielumus aprēķina, dalot vienu ar otru divas savstarpēji būtiski saistītas absolūtās vai relatīvās kopas sastāvdaļas (eksportu un importu; noslēgto un šķirto laulību skaitu; vīriešu un sieviešu skaitu u. c.).

Piemērs.

Latvijas kopējais eksporta apjoms 2021. gadā bija 16 452,3 milj. EUR, importa apjoms – 19 518,9 milj. EUR. Dalot eksporta apjomu ar importa apjomu, var aprēķināt, ka eksports bija 84,28 % no importa apjoma: $\left(16452{,}3 / 19518{,}9\right)100 = 84{,}28\ \%$. Var aprēķināt, ka importa apjoms pārsniedza eksporta apjomu 1,2 reizes: $\left(19518{,}9 / 16452{,}3 = 1{,}186\right)$.

Koordinācijas relatīvie lielumi, tāpat kā struktūras relatīvie lielumi, ir būtiski kopas sastāva analīzē. Koordinācijas relatīvie lielumi kopas sastāvu izsaka nevis vispārīgi, bet atbilstošo sastāvdaļu pretstatāmā salīdzinājumā.

Salīdzinājumu relatīvie lielumi. Pēc būtības ikviens relatīvais lielums ir salīdzinājums, jo to aprēķina kā divu lielumu attiecību, tomēr statistikas teorijā nodala īpašu salīdzinājumu relatīvo lielumu veidu. Salīdzinājumu relatīvo lielumu veidā pretstata, piemēram, dažādu valstu un reģionu ekonomiskos rādītājus (teritoriju, iedzīvotāju skaitu, nacionālo bagātību, saražotās produkcijas daudzumus u. c.).

Salīdzinājumu relatīvie lielumi raksturo divu vai vairāku vienveidīgu objektu attiecību **nemainīgā momentā** vai **periodā**.

Par relācijas bāzi var izmantot jebkuru no rādītājiem.

Parasti šos rādītājus aprēķina **procentos** vai **reizēs**.

Salīdzinājumu relatīvos lielumus var aprēķināt, attiecinot divus absolūtos vai relatīvos lielumus.

Piemērs.

Latvijas teritorija ir 64,6 tūkst. km^2, ASV teritorija – 9 363,5 tūkst. km^2, Krievijas teritorija – 17 075,4 tūkst. km^2.

Attiecinot ASV un Krievijas teritoriju pret Latvijas teritoriju, redzams, ka ASV teritorija ir 144,9 reizes lielāka $\left(9363{,}5 / 64{,}6 = 144{,}9\right)$, bet Krievijas teritorija – 264,3 reizes lielāka par Latvijas teritoriju $\left(17{,}075{,}5 / 64{,}6 = 264{,}3\right)$.

Mainot vietām skaitītājus un saucējus, var secināt, ka Latvijas teritorija atbilst 0,7 % no ASV teritorijas $[\left(64{,}6 / 9363{,}5\right)100 = 0{,}7\ \%]$ un 0,4 % no Krievijas teritorijas: $\left(64{,}6 / 17075{,}4\right)100 = 0{,}4\ \%$.

Praksē sevišķi izplatīta ir diviem objektiem piemītoša dinamikas relatīvo lielumu (augšanas tempu) pretstatīšana. Šādus rādītājus statistikā sauc par **apsteidzes relatīvajiem lielumiem** (apsteidzes tempiem).

Intensitātes relatīvie lielumi raksturo vienas parādības izplatību citā, ar to saistītā un par relācijas bāzi pieņemtā parādībā, piemēram, IKP uz vienu iedzīvotāju, zivju produkcijas patēriņš uz vienu iedzīvotāju u. c. Tos aprēķina, dalot pētāmās parādības absolūto lielumu ar tās vides absolūto lielumu, kurā parādība attīstās vai izplatās.

Piemērs.

Rūpniecības produkcijas apjoms 2022. gada I ceturksnī faktiskajās cenās bija 118,4 milj. EUR, iedzīvotāju skaits – 1875,7 tūkst. cilvēku.

Intensitātes relatīvais lielums (rūpniecības produkcijas apjoms uz vienu iedzīvotāju) bija 63,12 EUR (118400 / 1875,7).

Sociālajā statistikā un demogrāfijā intensitātes relatīvos lielumus aprēķina arī uz 10 000 un 100 000 iedzīvotāju (studentu skaits uz 10 000 iedzīvotāju, ārstu skaits uz 100 000 iedzīvotāju).

Piemērs.

Latvijā 2022. gadā tika noslēgti 11,8 tūkst. laulību. Iedzīvotāju skaits bija 1875,7 tūkst. cilvēku. Intensitātes relatīvais lielums (noslēgtās laulības uz 10 000 iedzīvotāju) bija 62 laulības: $\left(11{,}8 / 1875{,}7\right)10000 = 62$ laulības.

Ņemot vērā intensitātes relatīvo lielumu ekonomisko būtību, tos var saukt arī par **ekonomiskās un sociālās attīstības līmeņa rādītājiem**.

Intensitātes relatīvos lielumus plaši lieto **statistiskos salīdzinājumos** (arī starptautiskos salīdzinājumos).

Aprēķinot intensitātes relatīvos lielumus, jānodrošina abu relācijā pretstatāmo parādību **laika identitātes**, respektīvi, jāpanāk, lai daļas skaitītājā un saucējā esošie lielumi būtu saistīti ar ilguma un rakstura ziņā vienādu laiku.

Ekonomiskās attīstības relatīvie lielumi satura ziņā ir tieši saistīti ar valsts, atsevišķu uzņēmumu ekonomiskās darbības rezultātiem. Pie tiem pieder tādi vispārīgie ekonomiskās attīstības rādītāji kā valstī saražotās un patērētās produkcijas apjoms, rēķinot vidēji uz vienu iedzīvotāju. Tos aprēķina, dalot noteiktā laika periodā ražoto vai patērēto produkcijas daudzumu ar gada vidējo iedzīvotāju skaitu.

Ja relatīvais lielums ir dažāda nosaukuma lielumu attiecība, tam var būt **salikta mērvienība**, tāpat kā tām mērvienībām, kurās dažreiz izsaka absolūtos lielumus. Piemēram, iedzīvotāju blīvums (cilv./km^2), kuru aprēķina, dalot kādas teritorijas (valsts) iedzīvotāju skaitu ar šīs teritorijas (valsts) platību.

4.4. Relatīvo lielumu absolūtās starpības

Statistikas praksē parasti aprēķina ne tikai vienu, bet vienlaicīgi vairākus noteikta veida relatīvos lielumus par vairākiem objektiem, teritorijām, laika periodiem, parādībām utt. Piemēram, aprēķina peļņas plāna izpildi par katru kādas nozares uzņēmumu, iekšzemes kopproduktu, nodarbināto vecuma struktūru utt. Svarīga analītiska nozīme ir tādām **relatīvo lielumu starpībām**, kas rāda, cik lielas ir salīdzināmo objektu (periodu) **relatīvo raksturojumu absolūtās atšķirības**. Relatīvo lielumu absolūto starpību izteiksmes forma ir punkti, kas atkarībā no relācijas standarta var būt procentpunkti %p (% – %), promiļu punkti ‰p (‰ – ‰) un prodecimiļu punkti ‱p (‱ – ‱).

Punkti kā relācijas mērs ir zināma veida analogi procentos, promilēs un prodecimilēs izteiktiem relācijas rādītājiem, taču analītiskās izziņas aspektā starp šiem rādītājiem pastāv būtiska atšķirība.

Piemērs.

Divu būvniecības uzņēmumu celtniecības plāna izpilde, EUR un %

	Produkcijas apjoms, tūkst. EUR		Prognozes izpilde, %
	prognozes uzdevums	faktiski	
1. uzņēmums	200	240	120,0
2. uzņēmums	250	400	160,0
Kopā	450	640	142,0

Salīdzinot abu uzņēmumu prognozes izpildes relatīvos lielumus – atņemot tos vienu no otra –, nevar apgalvot, ka otrā uzņēmuma prognoze izpildīta (pārsniegta) par 40 % vairāk nekā pirmajā uzņēmumā (160 – 120 = 40). Šo **relatīvo lielumu starpība ir procentpunkti**. Līdz ar to pareizs secinājumu formulējums būs: prognozes izpilde 2. uzņēmumā ir par 40 procentpunktiem (40 %p) lielāka nekā prognozes izpilde 1. uzņēmumā.

Ja tomēr šis salīdzinājums ir jāizsaka procentos, tad 2. uzņēmumā iegūtais prognozes izpildes relatīvais lielums 160 % jādala ar 1. uzņēmumā iegūto prognozes izpildes relatīvo lielumu 120 %. Rezultātā iegūst, ka 2. uzņēmumā prognozes izpildes pakāpe ir 1,33 reizes jeb par 33 % augstāka nekā prognozes izpildes pakāpe 1. uzņēmumā (160 / 120 = 1,33 jeb 133 %; 133 % – 100 % = 33 %).

Neskatoties uz to, ka procentpunktu un cita veida punktu lietošana ir vispārīgs relatīvo lielumu analīzes paņēmiens, tos parasti nelieto gadījumos, kad relatīvais lielums iegūts kā dažāda veida lielumu attiecība, kuriem ir sava salikta mērvienība.

Pārbaudes jautājumi

1. Kā var klasificēt statistikas rādītājus?
2. Kādas ir statistisko rādītāju un to sistēmu galvenās funkcijas?
3. Ko statistikā definē kā absolūtos lielumus, un kādās mērvienībās tos izsaka?
4. Kas ir relatīvie lielumi, un kādos gadījumos tos izmanto?
5. Kādi ir relatīvo lielumu veidi, un kas nosaka to izmantošanas izvēli?

Darbs auditorijā

1. Tirdzniecības uzņēmums plāno palielināt apgrozījumu pārskata gadā, salīdzinot ar iepriekšējo gadu, par 14,5 %. Faktiskā plāna izpilde bija 102,7 %. Noteikt relatīvo rādītāju apgrozījuma dinamiku.
2. Uzņēmums plāno palielināt produkcijas apjomu, salīdzinot ar iepriekšējo gadu, par 18 %. Faktiskais ražošanas apjoms sasniedza 112,3 % no pagājušā gada līmeņa. Veikt relatīvo rādītāju iespējamos aprēķinus!
3. Saskaņā ar plānu uzņēmumam ar 372 darbiniekiem bija jāsaražo 11 240 produkcijas vienību. Faktiski 370 darbinieki saražoja 12 600 tūkst. produkcijas vienību. Aprēķināt plāna izpildi pa šādu rādītāju grupām: a) par saražoto produkciju; b) par strādājošo skaitu un izdarīt secinājumus.
4. Lai pārbaudītu konservēto augļu un dārzeņu neto svaru, kam faktiski būtu jābūt 400 g vienā konservu kārbā, tika veikta pārbaude četrās ražotnes noliktavās. Pārbaudes rezultāti atspoguļoti tabulā.

Konservu nosaukums	Svars, g	Konservu skaits noliktavās, vien.			
		1	2	3	4
Ķiršu ievārījums	270	344	560	126	374
Plūmju ievārījums	640	105	276	336	324
Ābolu biezenis	210	102	288	202	374

   Raksturojiet produkcijas struktūru katrā noliktavā! Ko vēl var aprēķināt no dotajiem datiem?

5. Viena produkta vienības cena 1. veikalā ir 200 EUR, bet 2. veikalā – 230 EUR. Aprēķināt vidējo cenu precēm abos veikalos, ja:
   1) papildu informācija nav pieejama;
   2) ja 1. veikalā realizētas 16 produktu vienības, bet 2. veikalā – 24;

3) ja peļņa no visa pārdošanas apjoma 1. veikalam bija 260 EUR, bet 2. veikalam – 210 EUR;
4) ja pārdošanas apjoms abos veikalos ir vienāds;
5) ja peļņa no visa pārdotā apjoma abos veikalos bija vienāda.

Uzdevumi relatīvo lielumu aprēķināšanai

1. uzdevums. Tabulā dota informācija par algotu darbu nestrādājošo sieviešu īpatsvaru darbspējīgā vecumā (nosacīti dati).

Reģioni	Nestrādājošo sieviešu īpatsvars darbspējīgā vecumā, %
A	17,1
B	16,2
C	14,3
D	35,1
E	29,5

Salīdzināt un izdarīt secinājumus par A reģionā algotu darbu nestrādājošo sieviešu īpatsvaru un pārējos reģionos algotu darbu nestrādājošo sieviešu īpatsvaru:

a) procentos (ar 1 zīmi aiz komata),
b) procentpunktos (ar 1 zīmi aiz komata).

2. uzdevums. Būvniecības produkcijas apjomi, tūkst. EUR, faktiskajās cenās (datu avots: *www.csp.gov.lv*).

Ceturkšņi	Būvniecības produkcijas apjomi, tūkst. EUR
I	393 269
II	612 818
III	804 109
IV	782 046

Aprēķināt:

1) salīdzinājumā ar iepriekšējo ceturksni būvniecības produkcijas:
   a) augšanas koeficientu (ar trīs zīmēm aiz komata);
   b) augšanas tempu procentos (ar vienu zīmi aiz komata);
   c) pieauguma tempu (ar vienu zīmi aiz komata);
2) IV ceturksnī salīdzinājumā ar I un II ceturksni:
   a) augšanas koeficientu (ar trīs zīmēm aiz komata);
   b) augšanas tempu procentos (ar vienu zīmi aiz komata);

   c) pieauguma tempu (ar vienu zīmi aiz komata);
3) salīdzinājumā ar iepriekšējo ceturksni būvniecības produkcijas absolūto pieaugumu, tūkst. EUR;
4) būvniecības produkcijas absolūto pieaugumu IV ceturksnī salīdzinājumā ar I ceturksni, tūkst. EUR.

3. uzdevums. Tabulā doti dati par Latvijas ostās nosūtītajām kravām, tūkst. t.

Ceturksnis	2013	2022
Pirmais	17 141,3	9431,8
Otrais	16 065,7	8070,0
Trešais	14 122,8	7827,8
Ceturtais	15 020,2	8357,3

Aprēķināt:

1) 2022. gadā salīdzinājumā ar iepriekšējo ceturksni nosūtīto kravu apjoma:
   a) augšanas koeficientu (ar trīs zīmēm aiz komata);
   b) augšanas tempu procentos;
   c) pieauguma tempu procentos;
2) 2022. gadā salīdzinājumā ar I ceturksnī nosūtīto kravu apjoma:
   a) augšanas koeficientu (ar trīs zīmēm aiz komata);
   b) augšanas tempu procentos;
   c) pieauguma tempu procentos;
3) 2022. gadā salīdzinājumā ar 2013. gada attiecīgo ceturksni nosūtīto kravu apjoma:
   a) augšanas tempu procentos (ar vienu zīmi aiz komata);
   b) pieauguma tempu procentos (ar vienu zīmi aiz komata);
4) nosūtīto kravu apjomu:
   a) 2013. gadā;
   b) 2022. gadā;
5) 2022. gadā salīdzinājumā ar 2013. gadu nosūtīto kravu apjoma:
   a) augšanas tempu procentos (ar vienu zīmi aiz komata);
   b) pieauguma tempu procentos (ar vienu zīmi aiz komata);
   c) absolūto pieaugumu.

4. uzdevums. Faktiskais un prognozētais importa apjoms no N valsts, tūkst. EUR (nosacīti dati).

Mēneši	Importa apjoms, tūkst. EUR		Prognozētais importa apjoms pārskata gadā, tūkst. t
	bāzes gadā	pārskata gadā	
Janvāris	462	474	486
Februāris	440	482	470
Marts	491	503	515

Aprēķināt:

1) importa apjomu bāzes gada I ceturksnī, tūkst. EUR;
2) pārskata gada I ceturksnī, tūkst. EUR:
   a) prognozēto produkcijas apjomu;
   b) faktisko produkcijas apjomu;
3) pārskata gada I ceturksnī:
   a) prognozes uzdevumu procentos;
   b) prognozes uzdevuma izpildi procentos;
   c) augšanas tempu procentos;
4) parādīt savstarpējo saistību starp augšanas tempa, prognozes uzdevuma un prognozes izpildes relatīvajiem lielumiem.

5. uzdevums. Faktiskie un prognozētie eksportprodukcijas veidi (nosacīti dati).

Eksportprodukcijas veids	Eksportprodukcijas apjoms bāzes gadā, tūkst. EUR	Plāna uzdevums, tūkst. EUR	Eksportprodukcijas apjoma izmaiņas pārskata gadā, %
Farmācija	80	+10	–3
Metālizstrādājumi	250	–30	–16
Koksne	460	+50	+7
Pārtikas produkcija	170	+15	+12

Aprēķināt:

1) par katru eksportprodukcijas veidu un kopā pārskata gadā:
   a) prognozēto produkcijas apjomu, tūkst. EUR;
   b) faktisko produkcijas apjomu, tūkst. EUR;
2) pārskata gadā kopā ražotās produkcijas:
   a) prognozes uzdevumu procentos;
   b) prognozes izpildi procentos;
   c) augšanas tempu procentos.

Parādīt savstarpējo saistību starp augšanas tempa, prognozes uzdevuma un prognozes izpildes relatīvajiem lielumiem.

6. uzdevums. Ražotais produkcijas apjoms bāzes gadā un tā izmaiņas uzņēmumā pārskata gadā (nosacīti dati).

Pusgads	Ražotais produkcijas apjoms bāzes gadā, tūkst. EUR	Pārskata gadā	
		augšanas temps, %	prognozes uzdevums, %
I	285,0	108,2	96,7
II	435,0	98,6	105,5

Aprēķināt:

1) prognozēto produkcijas apjomu katrā pusgadā un pārskata gadā, tūkst. EUR;
2) faktisko produkcijas apjomu katrā pusgadā un pārskata gadā, tūkst. EUR;
3) prognozes uzdevumu procentos (ar vienu zīmi aiz komata);
4) prognozes izpildi procentos (ar vienu zīmi aiz komata);
5) augšanas tempu procentos (ar vienu zīmi aiz komata);
6) parādīt matemātiskās sakarības starp prognozes uzdevumu un prognozes izpildes un augšanas tempa relatīvajiem lielumiem, izmantojot datus par visu gadu.

7. uzdevums. Uztura produktu realizācijas izmaiņas mazumtirdzniecības uzņēmumā pārskata gadā salīdzinājumā ar bāzes gada attiecīgo ceturksni (nosacīti dati).

Ceturkšņi	Mazumtirdzniecības apgrozījuma	
	pieauguma temps, %	prognozes uzdevuma pieauguma temps, %
I	–1,4	0,6
II	–0,5	1,1
III	4,3	2,8
IV	2,7	3,2

Aprēķināt:

1) pārskata gada katrā ceturksnī uztura produktu realizācijas:
   a) augšanas tempu procentos;
   b) prognozes uzdevumu procentos;
2) pārskata gada katrā ceturksnī uztura produktu realizācijas:
   a) augšanas koeficientu;
   b) prognozes uzdevuma koeficientu;
   c) prognozes izpildes koeficientu;
   d) prognozes pārsniegumu vai neizpildi procentos.

5. VIDĒJIE LIELUMI

5.1. Vidējo lielumu jēdziens

Statistiskos aprēķinos bieži rodas vajadzība aprēķināt vidējos lielumus. Sabiedriskās dzīves parādības, kuras pēta statistika, sastāv no daudziem atsevišķiem gadījumiem. Katra pētāmās kopas vienība dažādu iemeslu dēļ kaut nedaudz atšķiras no citām analogām šīs pašas kopas vienībām, piemēram, darba samaksa, iedzīvotāju vecums, cenas tirgū u. c.

Vidējo lielumu būtība ir tā, ka tajos savstarpēji dzēšas atsevišķu vienību pazīmes vērtības, kuras ietekmē nejauši faktori, un tiek ņemtas vērā pārmaiņas, kuras notikušas galveno faktoru ietekmes rezultātā. Tas ļauj vidējiem lielumiem parādīt pazīmes tipisko lielumu un abstrahēties no atsevišķo vienību individuālajām īpatnībām.

Statistiskie vidējie lielumi izsaka masveida parādību tipiskos, raksturīgos, normālos līmeņus un stāvokļus. Vidējo lielumu veidā izpaužas lielākā daļa statistisko likumsakarību. Šie lielumi dod iespēju salīdzināt dažādus kopumus, objektus, parādības, sakarības starp tiem. Tos plaši izmanto dinamikas pētīšanai, starptautiskos salīdzinājumos u. c.

Katrs vidējais lielums raksturo kopu pēc kādas vienas pazīmes. Lai iegūtu pilnīgu un vispusīgu priekšstatu par pētāmo kopu, ir jāaprēķina dažādi vidējo lielumu veidi. Jāatceras, ka vidējie lielumi raksturo parādību kopumā, bet nav tieši saistīti ar kādu no kopas vienībām.

Vidējos lielumus, kurus aprēķina visai kopai, sauc par **vispārējiem vidējiem** lielumiem, bet vidējos lielumus, kurus aprēķina katrai grupai, sauc par **grupu vidējiem** lielumiem.

Aprēķinot vidējos lielumus, ir svarīgi izvēlēties pareizo aprēķināšanas paņēmienu un līdz ar to nezaudēt aprēķināmā rādītāja ekonomisko interpretāciju.

Nozīmīgākie un praksē plašāk lietotie **pakāpju vidējie lielumi** ir:

- aritmētiskais vidējais,
- ģeometriskais vidējais,
- kvadrātiskais vidējais.

Atkarībā no apstrādājamās informācijas īpatnībām izšķir:

- **nesvērtos** (vienkāršos) vidējos lielumus, kurus aprēķina no nesagrupētiem datiem;
- **svērtos** vidējos lielumus, kurus aprēķina no sagrupētiem datiem.

Vidējos lielumus nevar izvēlēties patvaļīgi. Katram vidējam lielumam ir savs ekonomiskais saturs un īpašības, tādēļ to lietošana ir jāpamato ar pētījuma mērķi, uzdevumiem un apstrādājamās informācijas īpatnībām.

5.2. Nesvērtie vidējie lielumi

Vienkāršais aritmētiskais vidējais statistikas praksē ir visvairāk izplatīts. To aprēķina, dalot pētāmās parādības kopapjomu ar kopuma vienību skaitu. **Vienkāršo aritmētisko vidējo** aprēķina pēc formulas:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n},$$

kur X_i – variante;
n – kopas vienību skaits.

Variante ir atsevišķu kopas vienību pazīmes vērtība.

Piemērs.
Uzņēmumā strādā septiņi cilvēki, kuru vecums ir 18, 21, 35, 47, 52, 59 un 64 gadi. Var aprēķināt, ka darbinieku vidējais vecums ir
$\left(18+21+35+47+52+59+64\right)/7 = 42{,}4$ gadi.

Harmoniskais vidējais. Sociālekonomiskajos aprēķinos harmoniskā vidējā lietošana nepieciešama tad, ja nav tiešas sākotnējās informācijas, kas būtu piemērota aritmētiskā vidējā aprēķināšanai.
Harmonisko vidējo aprēķina pēc formulas:

$$\bar{X}_{\text{harm.}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_i}} = \frac{n}{\frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2} + \ldots + \frac{1}{X_n}},$$

kur X_i – variante;
n – kopas vienību skaits.

Piemērs.
Pieci strādnieki izgatavo viena veida izstrādājumu, bet ar dažādu darba patēriņu viena izstrādājuma izgatavošanai. Pirmais strādnieks izlieto 2,1 stundu, otrais – 1,5 stundas, trešais – 2 stundas, ceturtais – 1,6 stundas, piektais – 2,3 stundas.
Vidējā darbietilpība ($\bar{t}$) būs:

$$\bar{t} = \frac{1+1+1+1+1}{\frac{1}{2{,}1} + \frac{1}{1{,}5} + \frac{1}{2{,}0} + \frac{1}{1{,}6} + \frac{1}{2{,}3}} = \frac{5}{0{,}48 + 0{,}67 + 0{,}5 + 0{,}63 + 0{,}77} = 1{,}64 \text{ h}.$$

Tātad viena izstrādājuma izgatavošanas vidējā darbietilpība ir 1,64 stundas.

Kvadrātisko vidējo lieto tad, ja dati, kuru vidējais jāatrod, ir radušies, rēķinot novirzes no kāda cita vidējā. Kvadrātiskais vidējais ir kvadrātsakne no kvadrātā kāpinātu varianšu aritmētiskā vidējā lieluma.

Statistikā šo lielumu visplašāk lieto sadalījuma rindas pazīmes individuālo nozīmju variācijas pētīšanā.

Kvadrātiskā vidējā formula:

$$\bar{X}_{\text{kv}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n}} = \sqrt{\frac{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + \dots X_n^2}{n}}.$$

Ģeometriskais vidējais raksturo pētāmās parādības vidējo attīstības ātrumu (vidējo augšanas tempu). Ģeometriskais vidējais ir *n* pakāpes sakne no *n* varianšu reizinājuma. To aprēķina pēc formulas:

$$\bar{X}_{\text{ģeom.}} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} X_i} = \sqrt[n]{X_1 X_2 X_3 \dots X_n}.$$

Ģeometrisko vidējo galvenokārt lieto dinamikas rindas analīzē, lai raksturotu pētāmās parādības attīstības ātrumu, piemēram, vidējo augšanas tempu.

Piemērs.

Inflācija Latvijā 2015. gada februārī salīdzinājumā ar janvāri bija 103 %; martā salīdzinājumā ar februāri – 104 %; aprīlī salīdzinājumā ar martu – 106 %; maijā salīdzinājumā ar aprīli – 106 %.

Mēneša vidējā inflācija ir:

$$\bar{X}_{\text{infl.}} = \sqrt[4]{1{,}03 \cdot 1{,}04 \cdot 1{,}06 \cdot 1{,}06} = 1{,}047 \text{ jeb } 104{,}7\,\%.$$

5.3. Svērtie vidējie lielumi

Ja pētāmajā kopā ietilpst liels novērošanas vienību skaits, tad sākotnējā informācija parādās sadalījuma rindas vai grupējumu veidā.

Ja dati ir sagrupēti, lieto svērtos vidējos. Tos aprēķina, ņemot vērā katras variantes atkārtošanās skaitu (statistiskos svarus). Statistikā par **svēršanu** sauc varianšu reizināšanu ar to biežumiem.

Svērto aritmētisko vidējo vispārīgā veidā var aprēķināt pēc formulas:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{X_1 f_1 + X_2 f_2 + \dots + X_n f_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_n},$$

kur f – varianšu biežumi.

Pieņemsim, ka jāaprēķina vidējā darba alga 20 uzņēmumā strādājošiem darbiniekiem, kuru darba samaksa ir parādīta tabulā.

Darbinieku skaits, cilv. (f)	1	2	6	5	3	2	1
Darba samaksa, EUR (X)	585	690	788	836	920	970	1120

Vidējā darba alga ir:

$$\bar{X} = \frac{1 \cdot 585 + 2 \cdot 690 + 6 \cdot 788 + 5 \cdot 836 + 3 \cdot 920 + 2 \cdot 970 + 1 \cdot 1120}{20} = 834{,}65 \text{ EUR.}$$

Aprēķinot **svērto** aritmētisko vidējo, absolūto lielumu vietā var lietot varianšu īpatsvarus, t. i., varianšu relatīvos biežumus (W). Aprēķinus veic pēc formulas:

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i W_i}{\sum W_i},$$

kur $\sum W_i = 100{,}0\ \%$.

Piemērs.

Kādā daudzdzīvokļu mājā ir šāds dzīvokļu sadalījums:

22 % – vienistabas dzīvokļi,

50 % – divistabu dzīvokļi,

19 % – trīsistabu dzīvokļi,

9 % – četristabu dzīvokļi.

$$\bar{X} = \textit{dzīvokļu vidējais lielums} = \frac{1 \cdot 22 + 2 \cdot 50 + 3 \cdot 19 + 4 \cdot 9}{22 + 50 + 19 + 9} = 2{,}15 \text{ istabas.}$$

Relatīvie biežumi var būt doti arī skaitļa 1 daļās (0,22; 0,50; 0,19; 0,09). Tādā gadījumā svaru summa ir vienāda ar 1.

Vidējos lielumus var aprēķināt no variantēm, kuras pašas jau ir vidējie lielumi:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{X}_i f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i},$$

kur $\bar{X}_i$ – i grupas svērtais aritmētiskais vidējais;

f_i – i grupas statistiskais svars.

Piemērs.

Tabulā redzami dati par nodarbināto skaitu un vidējo darba algu trijos uzņēmumos.

Uzņēmumi	I	II	III
Vidējā darba alga, EUR	574	618	821
Nodarbināto skaits, cilv.	202	135	49

Vidējā darba alga trijos uzņēmumos ir:

$$\overline{\overline{X}} = \frac{574 \cdot 202 + 618 \cdot 135 + 821 \cdot 49}{202 + 135 + 49} = 620{,}74 \text{ EUR}.$$

Svērto harmonisko vidējo lieto tad, kad nav iespējams veikt aprēķinu, izmantojot aritmētiskā vidējā formulu, t. i., ja nav zināmi sadalījuma rindas varianšu absolūtie biežumi *f* vai relatīvie biežumi *W*, bet ir zināms to reizinājums *Xf* vai *XW*. Harmonisko vidējo aprēķina pēc formulas:

$$\bar{X}_{\mathrm{h}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i f_i}{\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i f_i}{X_i}} = \frac{X_1 f_1 + X_2 f_2 + \ldots + X_n f_n}{\frac{X_1 f_1}{X_1} + \frac{X_2 f_2}{X_2} + \frac{X_n f_n}{X_n}}.$$

5.4. Aritmētiskā vidējā aprēķināšana intervālu sadalījuma rindai

Variantes, kurām jāaprēķina aritmētiskais vidējais, var būt izteiktas ne vien ar atsevišķām diskrētām nozīmēm, bet arī intervālos, t. i., "no – līdz". Tādā gadījumā par varianšu skaitliskajām nozīmēm nosacīti pieņem intervālu centra nozīmes (intervālu vidējās nozīmes). Piemēram, ja variante ir no 5 līdz 8, tad intervāla centrs būs $6{,}5\left[\left(5+8\right)/2\right]$; ja variante ir no 300 līdz 700, tad intervāla centrs būs $500\left[\left(300+700\right)/2\right]$.

Intervālus, kuriem trūkst sākuma vai beigu nozīmes, jeb nenoslēgtos intervālus noslēdz ar nākamo vai iepriekšējo noslēgto intervālu. Piemēram, intervālam 0–10 centrs ir 5; intervālam 500–1000 centrs ir 750; intervālam 1000 un vairāk intervāla centrs ir 1250.

Jāatzīmē, ka vidējā lieluma aprēķināšana intervālu sadalījuma rindai ir aptuvenāka nekā diskrētai sadalījuma rindai. Precizitāte ir lielāka, ja intervāli ir šaurāki un vienmērīgāki.

Intervālu sadalījuma rindai **svērto aritmētisko vidējo** aprēķina pēc formulas:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i' f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i},$$

kur X_i' – intervāla vidējā nozīme.

Piemērs.

N uzņēmuma darbinieku sadalījums pēc vecuma

Vecums, gadi	Nodarbināto skaits, cilvēki	Nodarbināto struktūra, %	Intervālu centri
X	f	W	$\left(X_i'\right)$
līdz 25	6	7,7	22,5
25–30	20	25,6	27,5
30–35	16	20,5	32,5
35–40	30	38,5	37,5
40–45	4	5,1	42,5
45 un vairāk	2	2,6	47,5
Kopā	78	100,0	

Nodarbināto vidējais vecums pēc absolūtajiem rādītājiem:

$$\bar{X} = \frac{6 \cdot 22{,}5 + 20 \cdot 27{,}5 + 16 \cdot 32{,}5 + 30 \cdot 37{,}5 + 4 \cdot 42{,}5 + 2 \cdot 47{,}5}{6 + 20 + 16 + 3 + 4 + 4} = \frac{2595}{78} = 33{,}3 \text{ gadi.}$$

Nodarbināto vidējais vecums pēc relatīvajiem rādītājiem:

$$\bar{X} = \frac{7{,}7 \cdot 22{,}5 + 25{,}6 \cdot 27{,}5 + 20{,}5 \cdot 32{,}5 + 38{,}5 \cdot 37{,}5 + 5{,}0 \cdot 42{,}5 + 2{,}6 \cdot 47{,}5}{7{,}7 + 25{,}6 + 20{,}5 + 38{,}5 + 5{,}1 + 2{,}6} =$$

$$= \frac{3327{,}5}{100{,}0} = 33{,}3 \text{ gadi.}$$

5.5. Sadalījuma rindas vidējie lielumi

Sadalījuma centra rādītāji ir:

- aritmētiskais vidējais;
- moda;
- mediāna.

Sadalījuma centra galvenais raksturotājs ir aritmētiskais vidējais. Atsevišķos gadījumos aritmētiskais vidējais ir jāpapildina arī ar modālo lielumu un mediānu. Piemēram, sadalījumu rindās ar atvērtiem intervāliem sadalījuma centra kvalitātes raksturošanai lietderīgāk izmantot modu un mediānu.

Diskrētai sadalījuma rindai aritmētisko vidējo aprēķina pēc aritmētiskā svērtā vidējā formulas:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{X_1 f_1 + X_2 f_2 + \ldots + X_n f_n}{f_1 + f_2 + \ldots + f_n},$$

kur X_i – pazīme jeb variante;

f_i – variantes biežums.

Intervālu sadalījuma rindai aritmētisko vidējo aprēķina pēc formulas:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{X_1' f_1 + X_2' f_2 + ... + X_n' f_n}{f_1 + f_2 + ... + f_n},$$

kur X_i' – intervāla vidējā nozīme.

Moda ir variante, kurai sadalījuma rindā ir **vislielākais biežums** (absolūtais vai relatīvais). Modu lieto, lai pētītu iedzīvotāju pieprasījumu pēc patēriņa precēm (piemēram, pēc apaviem, apģērbiem u. c.), kad jānosaka izmērs, pēc kura ir vislielākais pieprasījums. Modas praktiskā aprēķināšana ir atkarīga no tā, vai sadalījuma rinda ir diskrētu varianšu rinda vai intervāla rinda. **Diskrētā sadalījuma rindā moda nav jāaprēķina**, bet tikai jānolasa variante ar vislielāko biežumu. Moda ir raksturīga vienīgi tādam sadalījumam, kurā ir skaidri izteikts variančšu biežuma koncentrējums. Ja visām sadalījuma rindas variantēm ir apmēram vienāds biežums (nav visbiežāk sastopamās variantes), tad nav arī modas. Dažreiz sadalījuma rindā sastopami divi vai pat vairāki pazīmes skaitlisko nozīmju koncentrācijas punkti. Piemēram, ja vienā sadalījumā apvieno visas pārdotās vīriešu un sieviešu žaketes, tad parasti ir divi visbiežāk sastopamie žaketes izmēri – divas modas. Viena no tām izsaka visizplatītāko vīriešu žaketes izmēru, otra – visizplatītāko sieviešu žaketes izmēru. **Bimodālie** sadalījumi liecina par tajos ietverto vienību kvalitatīvu viendabīgumu. Taču tie sarežģī pētījuma gaitu, tāpēc tie ir jāpārveido, iegūstot viendabīgu statistisko kopumu. Intervāla sadalījuma rindai modu aprēķina pēc formulas:

$$Mo = X_o + \Delta \frac{f_{Mo} - f_{Mo-1}}{\left(f_{Mo} - f_{Mo-1}\right) + \left(f_{Mo} - f_{Mo+1}\right)},$$

kur Mo – moda;

X_o – modālā intervāla zemākā robeža;

Δ – modālā intervāla plašums;

f_{Mo} – modālā intervāla biežums;

f_{Mo-1} – pirmsmodālā intervāla biežums;

f_{Mo+1} – pēcmodālā intervāla biežums.

Modālais intervāls ir intervāls ar vislielāko biežumu. Modu parasti lieto preču un pakalpojumu pieprasījuma pētīšanai, kā arī gadījumos, kad aritmētiskā vidējā aprēķināšanai trūkst vajadzīgās informācijas.

Mediāna ir pazīmes skaitliskais lielums ranžētā sadalījuma rindas vidū esošai vienībai. **Ranžēta** ir sadalījuma rinda, kurā visas vienības sakārtotas augošā vai dilstošā kārtībā. Mediāna dala sadalījuma rindu divās vienādās daļās: pa kreisi no mediānas visas vienības ir mazākas par mediānu vai vienādas ar to, pa labi – lielākas vai vienādas ar to. Šī apstākļa dēļ mediānai statistikā piemīt vispārinošas īpašības – tā ieņem neitrālu stāvokli gan attiecībā pret vienībām ar lielajām, gan attiecībā pret vienībām ar mazajām pētāmās pazīmes skaitliskajām nozīmēm. Pirms mediānas aprēķina jāzina mediānas vienības kārtas numurs. Lai to aprēķinātu, vispirms jāizveido uzkrāto (kumulatīvo) biežumu rinda. **Uzkrātos biežumus iegūst**, secīgi summējot līdz kādai variantei šīs variantes un visu iepriekšējo variantšu biežumus. Lai aprēķinātu mediānu, nav uzkrāto biežumu rinda jāizveido līdz beigām. Pietiek, ja biežumu akumulāciju turpina tik ilgi, kamēr kāds uzkrāto biežumu rindas loceklis pirmoreiz pārsniedz mediānas kārtas numuru. Šim loceklim atbilstošā variante ir mediāna.

Mediānas vienības kārtas numuru atrod, palielinot locekļu skaitu par vienu vienību un iegūto rezultātu dalot ar 2:

$$Me_{(\mathrm{Nr.})} = \frac{n+1}{2};\ \frac{\sum f+1}{2} \text{ vai } Me_{(\mathrm{Nr.})} = \frac{\sum f+1}{2}.$$

Praksē parasti nepalielina locekļu skaitu, jo atšķirība nav būtiska.

Intervālu sadalījuma rindai mediānu aprēķina pēc formulas:

$$Me = X_o + \Delta \frac{\frac{\sum f}{2} - S_{f_{Me}-1}}{f_{Me}},$$

kur Me – mediāna;

Δ – mediānas intervāla plašums;

X_o – mediānas intervāla zemākā robeža;

$\sum f$ – sadalījuma rindas locekļu summa;

$S_{f_{Me-1}}$ – pirmsmediānas intervāla uzkrātais biežums;

f_{Me} – mediānas intervāla biežums.

Piemērs.

Mēneša darba samaksa un nodarbināto skaits N uzņēmumā

Mēneša darba samaksa, EUR	Nodarbināto skaits, cilvēki	Nodarbināto struktūra, %	Uzkrātie biežumi	
			absolūtie	relatīvie
X	f	W	S_f	S_w
400—450	10	10,3	10	10,3
450—600	28	28,9	38	39,2
600—800	25	25,8	63	65,0
800—920	18	18,5	81	83,5
920—1040	13	13,4	94	96,9
1040 un vairāk	3	3,1	97	100,0
Kopā	97	100,0		

Mēneša darba samaksas moda:

- aprēķināta, izmantojot absolūtos rādītājus:

$$Mo = 450 + 150\frac{28-10}{(28-10)+(28-25)} = 450 + 150\frac{18}{21} = 578{,}57\ \text{EUR};$$

- aprēķināta, izmantojot relatīvos rādītājus:

$$Mo = 450 + 150\frac{28{,}9-10{,}3}{(28{,}9-10{,}3)+(28{,}9-25{,}8)} = 578{,}57\ \text{EUR}.$$

Mēneša darba samaksas mediāna:

- aprēķināta, izmantojot absolūtos rādītājus:

$$Mo = 600 + 200\frac{48{,}5-38}{25} = 600 + 200\frac{10{,}5}{25} = 684{,}00\ \text{EUR};$$

- aprēķināta, izmantojot relatīvos rādītājus:

$$Mo = 600 + 200\frac{50-39{,}2}{25{,}8} = 684{,}00\ \text{EUR}.$$

Bez modas un mediānas aprēķina arī citus rādītājus, kas sakārtotu statistisko kopu dala četrās, piecās, desmit, simts vienādās daļās, t. i., **sadalījuma kvantilēs**. Sadalījumu desmit daļās dala **deciles**, piecās – **kvinteles**, četrās – **kvartiles**.

Kvartile dala sakārtotu variācijas rindu četrās vienādās daļās tā, lai katrā no tām būtu 25 % kopas vienību. Izšķir pirmo, otro un trešo kvartili. Kvartiles apzīmē ar latīņu burtu *Q* un katras kvartiles numura skaitli. Kvartiles aprēķinot, 25 % kopas vienību būs mazākas par pirmās kvartiles *Q*1 lielumu, 25 % atradīsies robežās starp *Q*1 un otro *Q*2 kvartili, 25 % atradīsies robežās starp otro *Q*2 un trešo *Q*3 kvartili, un pārējie 25 % pārsniegs trešo *Q*3 kvartili.

Pirmā kvartile – pazīmes vērtība, par kuru sakārtotā variācijas rindā 25 % kopas vienību ir reģistrētas mazākas vērtības. Pirmās kvartiles intervāls ir tas, kurā uzkrātie absolūtie biežumi pirmo reizi pārsniedz vienu ceturto daļu no kopas vienību skaita vai kurā uzkrātie relatīvie biežumi pirmo reizi pārsniedz 25 %.

Pirmās kvartiles **vienības kārtas numurs** ir:

$$Q_1 = 0{,}25\sum f.$$

Pirmo kvartili aprēķina pēc formulas:

$$Q_1 = X_{Q_1} + \Delta_1\frac{0{,}25\sum f - S_{Q_{1-1}}}{f_{Q_1}},$$

kur X_{Q_1} – intervāla apakšējā robeža, kurā atrodas pirmā kvartile;

Δ_1 – pirmās kvartiles intervāla garums;

$\sum f$ – kopas vienību skaits;

$S_{Q_{1-1}}$ – uzkrātais biežums intervālā, kas atrodas pirms pirmās kvartiles;

f_{Q_1} – pirmās kvartiles intervāla biežums.

Otrā kvartile – pazīmes vērtība, par kuru sakārtotā variācijas rindā 50 % kopas vienību ir reģistrētas mazākas vērtības. Otrā kvartile ir vienāda ar mediānu. Otrās kvartiles intervāls ir tas, kurā uzkrātie absolūtie biežumi pirmo reizi pārsniedz pusi no kopas vienību skaita vai kurā uzkrātie relatīvie biežumi pirmo reizi pārsniedz 50 %.

Otrās kvartiles **vienības kārtas numurs**:

$$Q_{2\text{nr.}} = 0{,}50\sum f.$$

Otro kvartili aprēķina pēc formulas:

$$Q_2 = X_{Q_2} + \Delta_2 \frac{0{,}5\sum f - S_{Q_{2-1}}}{f_{Q_2}},$$

kur X_{Q_2} – intervāla apakšējā robeža, kurā atrodas otrā kvartile;

Δ_2 – otrās kvartiles intervāla garums;

$\sum f$ – kopas vienību skaits;

$S_{Q_{2-1}}$ – uzkrātais biežums intervālā, kas atrodas pirms otrās kvartiles;

f_{Q_2} – otrās kvartiles intervāla biežums.

Otrā kvartile = *Me*.

Trešā kvartile – pazīmes vērtība, par kuru sakārtotā variācijas rindā 75 % kopas vienību ir reģistrētas mazākas vērtības. Trešās kvartiles intervāls ir tas, kurā uzkrātie absolūtie biežumi pirmo reizi pārsniedz trīs ceturtdaļas no kopas vienību skaita vai kurā uzkrātie relatīvie biežumi pirmo reizi pārsniedz 75 %.

Trešās kvartiles **vienības kārtas numurs**:

$$Q_{3\text{nr.}} = 0{,}75\sum f.$$

Trešo kvartili aprēķina pēc formulas:

$$Q_3 = X_{Q_3} + \Delta_3 \frac{0{,}75\sum f - S_{Q_{3-1}}}{f_{Q_3}},$$

kur X_{Q_3} – intervāla apakšējā robeža, kurā atrodas trešā kvartile;

Δ_3 – trešās kvartiles intervāla garums;

$\sum f$ – kopas vienību skaits;

$S_{Q_{3-1}}$ – uzkrātais biežums intervālā, kas atrodas pirms trešās kvartiles;

f_{Q_3} – trešās kvartiles intervāla biežums.

Mēneša darba samaksas pirmā kvartile:

- aprēķināta, izmantojot absolūtos rādītājus:

$$Q_1 = 450 + 150\frac{24{,}25 - 10}{28} = 450 + 150\frac{14{,}25}{28} = 450 + 76{,}34 = 526{,}34 \text{ EUR};$$

- aprēķināta, izmantojot relatīvos rādītājus:

$$Q_1 = 450 + 150\frac{0{,}25\cdot 100 - 10{,}3}{28{,}9} = 450 + 150\frac{14{,}7}{28{,}9} = 450 + 76{,}30 = 526{,}30 \text{ EUR}.$$

Otrā kvartile ir vienāda ar mediānu:

$$Q_2 = Me.$$

Mēneša darba samaksas trešā kvartile:

- aprēķināta, izmantojot absolūtos rādītājus:

$$Q_3 = 800 + 120\frac{72,75 - 63}{18} = 800 + 120\frac{9,75}{18} = 800 + 65,00 = 865,00 \text{ EUR};$$

- aprēķināta, izmantojot relatīvos rādītājus:

$$Q_3 = 800 + 120\frac{0,75 \cdot 100 - 65}{18,5} = 800 + 120\frac{10}{18,5} = 800 + 65,90 = 864,90 \text{ EUR}.$$

Nelielās atšķirības starp aprēķinātajiem rādītājiem absolūtā un relatīvā izteiksmē ir saistītas ar precizitātes pakāpi (zīmēm aiz komata).

Decile – pētāmās parādības pazīmes vērtības, kas dala sakārtotu variācijas rindu desmit vienādās daļās tā, lai katrā no tām nonāk 10 % kopas vienību.

Deciļu grupējumā deciļu lielumam, kas nodala vienu deciles grupu no otras, nav tik lielas nozīmes kā pašām deciļu grupām. Šīm grupām var aprēķināt grupu vidējos un grupu variācijas rādītājus, salīdzinot vienu grupu ar otru u. c. Rezultātā var iegūt plašu un vispusīgu materiālu par kopas sadalījumu. Sakārtojot šādu materiālu tabulā, iegūst **deciļu analītisko grupējumu**, kas analoģiski parastam analītiskam grupējumam rada sakarības un grupējumā ietverto pazīmju raksturu.

Pirmās deciles intervāls ir tas, kurā uzkrātie absolūtie biežumi pirmo reizi pārsniedz vienu desmito daļu no kopas vienību skaita vai kurā uzkrātie relatīvie biežumi pirmo reizi pārsniedz 10 %, otrās deciles intervāls – 20 %, trešās deciles – 30 %, ceturtās deciles – 40 %, piektās deciles – 50 %, sestās deciles – 60 %, septītās deciles – 70 %, astotās deciles – 80 %, un devītās deciles – 90 %.

Deciles intervāla ietvarus aprēķina pēc formulas:

$$D_1 = X_{D1} + \Delta_1 \frac{0,1\sum f - S_{D1-1}}{f_{D1}},$$

kur X_D – intervāla apakšējā robeža, kurā atrodas attiecīgi pirmā, otrā utt. decile;

Δ – attiecīgi pirmās, otrās utt. deciles intervāla garums;

S_f – kopas vienību skaits;

S_{D-1} – uzkrātais biežums intervālā, kas atrodas pirms pirmās, otrās utt. deciles;

f_{D1} – attiecīgi pirmās, otrās utt. deciles intervāla biežums.

Pārbaudes jautājumi

1. Ko izsaka statistiskie vidējie lielumi, un ko tie raksturo?
2. Kādus vidējos lielumus izšķir, un kurus no tiem izmanto visbiežāk?
3. Kuri ir sadalījuma centra rādītāji, un kas tos raksturo?
4. Kas ir "intervāls" un "uzkrātais biežums"?

Uzdevumi auditorijā

1. Aprēķiniet, cik vidēji darbinieki patērē laiku no biroja līdz mājām.

Laiks ceļā, min.	līdz 10	10—20	20—30	30—60	60 un vairāk
Darbinieku skaits, cilv.	2	10	9	5	1

2. Doti dati par preču realizāciju trīs dažādu pilsētu tirgos. Aprēķināt, kurā ceturksnī un par cik vidējā preču cena bija augstāka.

Pilsēta	I ceturksnis		II ceturksnis	
	Cena par 1 kg, EUR	Pārdots, t	Cena par 1 kg, EUR	Preču realizācijas apjoms, tūkst. EUR
1.	85	24	95	1900
2.	75	37	80	2800
3.	80	29	90	2070

Uzdevumi

1. uzdevums. Saražotais produkcijas apjoms un nodarbināto produktivitāte uzņēmuma četros cehos (nosacīti dati).

Cehi	Saražotais produkcijas apjoms, tūkst. EUR	Nodarbināto darba ražīgums, EUR/cilv.
1.	250,0	5000
2.	190,0	2000
3.	360,0	6000
4.	66,0	1200
Kopā	866,0	

Aprēķināt:

1) nodarbināto skaitu katrā cehā un uzņēmumā kopā;
2) nodarbināto struktūru procentos;
3) nodarbināto vidējo produktivitāti uzņēmumā:
   a) par svariem izmantojot nodarbināto skaitu,
   b) par svariem izmantojot nodarbināto struktūru.

2. uzdevums. Importa izejvielu īpatsvars piecu dažādu veidu izstrādājumu pašizmaksā un pašizmaksas apjomi (nosacīti dati).

Produkcijas veidi	Pašizmaksa, tūkst. EUR	Importa izejvielu īpatsvars, %
A	65,0	23,4
B	17,0	73,1
C	15,0	36,7
D	37,0	52,6
E	11,0	44,5
Kopā	145,0	

Aprēķināt:
1) importa izejvielu apjomu katram izstrādājumam pašizmaksā, tūkst. EUR (ar trīs zīmēm aiz komata);
2) importa izejvielu vidējo īpatsvaru izstrādājumu pašizmaksā procentos;
3) izstrādājumu pašizmaksas struktūru procentos;
4) importa izejvielu vidējo īpatsvaru izstrādājumu pašizmaksā procentos, par svariem izmantojot produkcijas pašizmaksas struktūru.

3. uzdevums. Ģimeņu skaits un cilvēku skaits ģimenēs (nosacīti dati).

Cilvēku skaits ģimenē	Ģimeņu skaits
1	20
2	24
3	22
4	14
5	6
6	4
Kopā	90

Aprēķināt:
1) ģimenes vidējo lielumu:
   a) par svariem izmantojot ģimeņu skaitu,
   b) par svariem izmantojot ģimeņu struktūru;
2) ģimeņu skaita uzkrātos biežumus;
3) modu:
   a) par svariem izmantojot ģimeņu skaitu,
   b) par svariem izmantojot ģimeņu struktūru;
4) mediānu:
   a) par svariem izmantojot ģimeņu skaitu,
   b) par svariem izmantojot ģimeņu struktūru.

4. uzdevums. Tabulā dota informācija par Kurzemes reģiona iedzīvotāju vecuma struktūru 2023. gadā.

Vecums gados	Iedzīvotāju vecuma struktūra, %
0–6	7,0
7–14	8,8
15–24	10,4
25–34	11,4
35–44	12,3
45–54	13,6
55–64	14,3
65+	22,1
Kopā	100,0

Aprēķināt:

1) iedzīvotāju vecuma intervāla vidējo garumu,
2) iedzīvotāju vidējo vecumu (ar vienu zīmi aiz komata),
3) modu,
4) mediānu.

6. VARIĀCIJAS RĀDĪTĀJI

6.1. Variācijas jēdziens

Pētot parādību skaitliskās likumsakarības, nepietiek aprēķināt tikai vidējos lielumus, jo jebkurai statistiskai kopai piemīt individuāla atšķirība, t. i., svārstīgums, daudzveidīgums, mainīgums (piemēram, izglītības līmenis, darba alga, vecums u. c.).

Variācija izsaka sabiedrisko parādību **svarīgas statistiskas likumsakarības** un ir patstāvīgs statistiskās izpētes objekts.

Variāciju rada apstākļu kopa (piemēram, cilvēku skaits ģimenē, dzīvokļa platība, uzņēmumu peļņas apjoms u. c.). Ja kopu veido pilnīgi vienādas vienības, šāda kopa nav statistiskās izpētes objekts. Ir sastopamas tādas kopas, kuru vienības ir vienādas pēc vienas vai vairākām pazīmēm, bet ir atšķirīgas pēc citām pazīmēm. Statistiku interesē tikai atšķirīgas pazīmes, kurām ir variācijas.

Variācijas aprēķināšana ļauj noteikt ietekmes pakāpi uz konkrēto pazīmi (piemēram, kādi faktori ietekmē iedzīvotāju saslimstību, ēnu ekonomiku, uzņēmumu finansiālo stāvokli utt.). Variācijas aprēķināšana ir būtiska izlases novērošanas organizācijā, ekspertu aptauju materiālu izstrādē un citiem mērķiem.

Variācija objektīvi pastāv teritorijā un laikā. Ar variāciju **teritorijā** saprot pazīmes svārstīgumu atsevišķās teritorijās. Piemēram, bezdarba līmenis Latvijas rajonos vienmēr būs atšķirīgs. Variācija **laikā** nozīmē pārmaiņas dažādos periodos vai momentos, piemēram, iebraukušo ārzemnieku skaits Latvijā 2000. gadā un tagad.

Ja variācija ir statistiskā objekta galvenā īpašība, tad vajadzīgas metodes un rādītāji, kuri ļautu raksturot un izmērīt tās skaitliskumu.

Viens no svarīgākajiem uzdevumiem variācijas pētīšanā ir izzināt tās lielumu. Variācijas **plašumu** raksturo tas, cik lielā mērā sadalījuma rindas atsevišķās variantes koncentrētas vai izkliedētas ap aritmētisko vidējo.

6.2. Variācijas absolūtie rādītāji

Variācijas mērīšanai statistikā lieto gan absolūtos, gan relatīvos, gan vidējos lielumus. Svarīgākie variācijas absolūtie rādītāji ir:

- variācijas amplitūda (svārstības),
- vidējā lineārā novirze,
- standartnovirze (vidējā kvadrātiskā novirze).

Amplitūda ir starpība starp mainīgā lieluma maksimālo un minimālo vērtību. To aprēķina:

$$R_v = X_{max} - X_{min},$$

kur R_v – amplitūda;

X_{max} – pazīmes lielākā vērtība;

X_{min} – pazīmes mazākā vērtība.

Jāatzīmē, ka diskrētā sadalījuma rindā variācijas amplitūdu nosaka tieši un precīzi. Intervālu rindā to var noteikt tikai aptuveni:

- ja par pazīmes mazāko vērtību ņem pirmā intervāla zemāko robežu, bet par lielāko vērtību – pēdējā intervāla augšējo robežu, tad variācijas amplitūda ir nedaudz palielināta;
- ja ņem vidējās nozīmes (intervālu centrus), variācijas amplitūda parasti ir nedaudz samazināta. Turklāt varianšu minimālās un maksimālās nozīmes ir nejaušas, neraksturīgas.

Pazīmes variāciju precīzāk raksturo rādītāji, kurus aprēķinot, ņem vērā pazīmes visu vērtību svārstīgumu.

Tā kā aritmētiskais vidējais ir īpašību apkopojošs rādītājs, tad vairāku variācijas rādītāju pamatā ir kopas atsevišķu vienību pazīmju lieluma novirze no vidējā. Pie šādiem rādītājiem pieskaita:

- vidējo lineāro novirzi,
- dispersiju,
- standartnovirzi.

Vidējā lineārā novirze ir aritmētiskais vidējais no sadalījuma rindas atsevišķu varianšu (absolūto noviržu) novirzēm no to aritmētiskā vidējā lieluma.

Lai aprēķinātu vidējo lineāro novirzi, vispirms no katras sadalījuma rindas variantes atņem aritmētisko vidējo. Iegūto algebrisko starpību absolūtās vērtības reizina ar attiecīgo varianšu biežumiem. Reizinājumus summē un iegūto rezultātu dala ar kopas vienību skaitu.

Tā kā **algebriskā summa**, ko veido pazīmes individuālo lielumu novirzes no aritmētiskā vidējā lieluma, vienmēr ir vienāda ar 0, tad vidējās lineārās novirzes aprēķinā izmanto **novirzes aritmētisko summu**, t. i., neatkarīgi no zīmes summē pazīmes individuālo noviržu lielumu absolūtās nozīmes. Aprēķina pēc formulas:

$$\alpha = \frac{\sum |x - \bar{x}| f}{\sum f},$$

kur f – variantes biežums;

$\sum f$ – kopas vienību skaits;

$\bar{x}$ – pazīmes aritmētiskais vidējais.

Vidējā lineārā novirze aptver visas sadalījuma rindas variantes. Tā variāciju raksturo pilnīgāk un stabilāk nekā variācijas amplitūdas rādītājs. Tomēr statistikas praksē vidējo lineāro novirzi lieto maz. Tam par cēloni ir vidējās lineārās novirzes matemātiskā nepilnība: aprēķinot vidējo lineāro novirzi, **algebrisko noviržu** vietā ņem **noviržu absolūtos lielumus** (summējot algebriskās novirzes no aritmētiskā vidējā, iegūst nulli). Šāda rīcība ir pretrunā ar noviržu reālo saturu, jo statistiskajās kopās noviržu zīmēm (+) vai (–) nav tikai formāls raksturs. Tās izsaka būtisku procesu objektīvu norisi. Noviržu algebrisko zīmju neievērošana ierobežo arī vidējās lineārās novirzes matemātisku sasaistīšanu ar citiem rādītājiem.

Dispersija ir statistisko datu variācija ap visas kopas aritmētisko vidējo. To apzīmē ar S^2 vai δ^2. Apzīmējumu S^2 lieto, ja dispersiju aprēķina pēc izlases datiem, bet ģenerālās kopas dispersiju apzīmē ar δ^2:

$$S^2 = \delta^2 \frac{\sum(x-\bar{x})f}{\sum f}.$$

Dispersiju statistikas teorijā var uzskatīt par noteikta veida variācijas etalonu. Tai ir gan teorētiska, gan praktiska nozīme. To var izmantot visur, kur nepieciešams variācijas lieluma vispārīgs raksturojums. Dispersiju plaši lieto matemātiskajā statistikā – tā ir cieši saistīta ar izlases metodi, dispersijas analīzi, korelācijas aprēķiniem utt. Dispersijai nav mērvienību. Ja lietotu mērvienības, dispersija būtu jāizsaka ar variējošās pazīmes mērvienības kvadrātu – kvadrātgadiem, kvadrāttonnām, kvadrāteiro utt.

Vidējā kvadrātiskā novirze (standartnovirze) ir kvadrātsakne no sadalījuma rindas dispersijas. Standartnovirzei ir tā pati mērvienība kas pazīmei. Tā ir viena no visbiežāk lietotajiem variācijas rādītājiem. Standartnovirze rāda, kā izvietojas vienību galvenā masa attiecībā pret aritmētisko vidējo. To aprēķina pēc formulas:

$$S = \delta = \sqrt{\frac{\sum(x-\bar{x})^2 f}{\sum f}}.$$

Dispersija un standartnovirze ir visplašāk lietojamie variācijas rādītāji. Tie ir matemātiskās statistikas pamats un ietilpst varbūtības teorijas teorēmās.

Aprēķinot variācijas amplitūdu, no **ranžētās** sadalījuma rindas abiem galiem var neietvert noteiktu vienādu vienību skaitu (variējošās pazīmes zemāko un augstāko nozīmi). No pietiekami liela vienību skaita var aprēķināt:

- procentilās variācijas amplitūdu,
- decilās variācijas amplitūdu,
- kvartilās variācijas amplitūdu.

No abiem galiem neietverot attiecīgi 1 %, 10 % vai 25 % pazīmes nozīmju lielāko un mazāko vienību, var zināmā mērā samazināt nejaušību radīto ietekmi.

Procentiles pētāmās parādības ir pazīmes vērtības, kas dala variācijas rindu simts vienādās daļās tā, ka katrā nonāk 1 % kopas vienību. Procentilās variācijas amplitūdu rēķina pēc formulas:

$$R_v = P_{99} - P_1,$$

kur P_{99} – deviņdesmit devītās procentiles lielums;
P_1 – pirmās procentiles lielums.

Kvartilās variācijas amplitūdu aprēķina:

$$Q = Q_3 - Q_1,$$

kur Q_3 – trešās kvartiles lielums;
Q_1 – pirmās kvartiles lielums.

Decilās variācijas amplitūdu aprēķina:

$$D = D_9 - D_1,$$

kur D_9 – devītās deciles lielums;
D_1 – pirmās deciles lielums.

Ja par sadalījuma centra rādītāju izmanto mediānu, tad kopas variācijas raksturošanai izmanto procentiļu, deciļu un kvartiļu vidējo novirzi (starpību dalot ar 2).

Šie lielumi rāda, par cik pēc savas absolūtās nozīmes no mediānas centra caurmērā atšķiras tās varianšu nozīmes, kas piemīt 99 %, 80 % vai 50 % ranžētas sadalījuma rindas vidusdaļā esošajai vienībai.

Kvartiļu vidējā novirze ir ievērojami mazāka nekā **standartnovirze**, jo atspoguļo pazīmes variāciju tikai variācijas apgabala centrālajā daļā (50 % novērojumu), bet standartnovirze – visā variācijas apgabalā.

Arī **deciļu** vidējā novirze ir mazāka par standartnovirzi.

Kvartiļu vidējo novirzi var lietot tikai tad, kad standartnovirzes aprēķināšana ir neiespējama vai apgrūtināta.

6.3. Variācijas relatīvie rādītāji

Variācijas relatīvos rādītājus lieto vienas kopas dažādu **pazīmju svārstīguma** salīdzināšanai vai arī vienas un tās pašas pazīmes svārstīguma salīdzināšanai vairākās kopās ar dažādu aritmētisko vidējo lielumu.

Variācijas relatīvos rādītājus parasti aprēķina procentos kā variācijas absolūto rādītāju attiecību pret aritmētisko vidējo vai mediānu. Galvenie relatīvie rādītāji ir:

- variācijas koeficients,
- oscilācijas koeficients,
- relatīvā lineārā novirze,
- kvartiļu variācijas koeficients,
- deciļu variācijas koeficients.

Variācijas koeficients raksturo variācijas relatīvo līmeni. To aprēķina, dalot standartnovirzi ar aritmētisko vidējo:

$$K_{\text{var}} = \frac{\delta}{\bar{x}}100.$$

Variācijas koeficientu statistiskajā analīzē var izmantot arī vidējā lieluma būtiskuma un stabilitātes novērtēšanai. Jo lielāks ir pazīmes variācijas koeficients, jo mazāka ir aritmētiskā vidējā kā parādības būtiskā līmeņa izteicēja nozīme, un otrādi – mazs pazīmes variācijas koeficients liecina par relatīvi stabilu un pētāmai kopai raksturīgu vidējo lielumu.

Oscilācijas koeficientu aprēķina, dalot variācijas amplitūdu ar aritmētisko vidējo:

$$K_{\text{osc}} = \frac{R_{\text{v}}}{\bar{x}}100.$$

Kvartiļu variācijas koeficientu aprēķina, dalot kvartiļu vidējo novirzi ar mediānu:

$$K_Q = \frac{\alpha_Q}{M_e}.$$

Deciļu variācijas koeficientu aprēķina, dalot deciļu vidējo novirzi ar mediānu:

$$K_D = \frac{\alpha_Q}{M_e}.$$

Deciļu variācijas koeficients vienmēr būs lielāks nekā kvartiļu variācijas koeficients, jo deciļu variācijas koeficients atspoguļo dažādību 80 % novērojumu masā, bet kvartiļu koeficients – tikai 50 % pamatmasā.

Relatīvo lineāro novirzi aprēķina, dalot vidējo lineāro novirzi ar aritmētisko vidējo:

$$\alpha_{\text{rel}} = \frac{\alpha}{\bar{x}}100.$$

Piemērs.

N uzņēmuma darbinieku sadalījums pēc vecuma

Vecums (x), gadi	Darbinieku skaits (f), cilvēki	Intervālu centri (x')	$x'f$	$\lvert x'-\bar{x}\rvert$	$\lvert x'-\bar{x}\rvert f$	$(x'-\bar{x})^2$	$(x'-\bar{x}^2)f$	S_f
25—30	20	27,5	550	8,4 (27, – 35,9)	168	70,56	1411,2	20
30—35	100	32,5	3250	3,4 (32,5 – 35,9)	340	11,56	1156,0	120
35—40	80	37,5	3000	1,6 (37,5 – 35,9)	128	2,56	204,8	200
40—45	40	42,5	1700	6,6 (42,5 – 35,9)	264	43,56	1742,4	
45—50	10	47,5	475	11,6 (47,5 – 35,9)	116	134,56	1345,6	
Kopā	250	×	8975	×	1016	×	5860,0	

Variācijas apjoms: $R_{v(a)} = 50 - 25 = 25$ gadi; $R_{v(b)} = 47,5 - 27,5 = 20$ gadi.

Darbinieku vidējais vecums: $\bar{x} = \dfrac{8975}{250} = 35,9$ gadi;

darbinieku modālais vecums: $Mo = 30 + 5\dfrac{100-20}{(100-20)+(100-80)} = 34$ gadi;

mediāna: $Me = 35 + 5\dfrac{125-120}{80} = 35,3$ gadi;

vidējā lineārā novirze: $\alpha = \dfrac{1016}{250} = 4,1$ gads;

dispersija: $\delta^2 = \dfrac{5860}{250} = 23,44$ (bez mērvienības).

Vidējā kvadrātiskā novirze: $\delta = \sqrt{23,44} = 4,8$ gadi;

relatīvā lineārā novirze: $\alpha_{rel} = \dfrac{4,1}{35,9}100 = 11,4\ \%$;

variācijas koeficients: $K_v = \dfrac{4,8}{35,9}100 = 13,5\ \%$;

oscilācijas koeficients: $K_{osc} = \dfrac{50-25}{35,9}100 = 69,6\ \%$.

6.4. Dispersiju rādītāji

Pētot pazīmes variāciju, var rīkoties divējādi:

- variācijas rādītājā var ietvert visu pētāmās pazīmes skaitlisko vai atributīvo nozīmju dažādību;
- variāciju var pētīt alternatīvi, t. i., katru kopuma vienību novērtē tikai tādā aspektā, lai konstatētu, vai tai piemīt vai nepiemīt pētāmā pazīme.

Tātad variāciju var pētīt ne tikai visai kopai, bet arī atsevišķām kopas grupām, kā arī starp grupām. Tādu pazīmes variācijas izpēti var veikt, aprēķinot un analizējot dažāda veida dispersijas:

- kopējo dispersiju,
- grupu dispersiju,
- starpgrupu dispersiju,
- grupu iekšējo dispersiju (grupu vidējo dispersiju).

Kopējā dispersija δ^2 pēta pazīmes variāciju visai kopai, kuru ietekmē visi faktori.

No sagrupētajiem datiem dispersiju aprēķina pēc formulas:

$$\delta^2 = \frac{\sum \left(x_i - \bar{x}\right)^2 f_i}{\sum f_i},$$

kur f_i – statistiskie svari (variantes biežumi);
x_i – variante;
$\bar{x}$ – visas kopas aritmētiskais vidējais.

Grupu dispersija raksturo pazīmes variāciju grupā. To aprēķina pēc formulas:

$$S_i^2 = \frac{\sum \left(x_i - \bar{x}_i\right)^2 \cdot f_i}{\sum f_i},$$

kur x_i – i-tās grupas variante;
$\bar{x}_i$ – i-tās grupas aritmētiskais vidējais;
f_i – variantes biežumi.

Summēšana notiek grupu robežās.

Sadalot pētāmā objekta vienības grupās, var aprēķināt katras grupas aritmētisko vidējo lielumu $\bar{x}_i$. Ja ir zināmi kopuma visu grupu aritmētiskie vidējie, var pētīt to savstarpējo variāciju, kuras lielumu vispārīgā veidā izsaka starpgrupu dispersija d^2.

Starpgrupu dispersija raksturo sistemātisko variāciju, t. i., pētāmās pazīmes lieluma atšķirības, kas rodas grupēšanas pamatā ieliktās pazīmes – faktora – ietekmē. Tā parāda grupu aritmētisko vidējo variāciju ap visas kopas aritmētisko vidējo, un to aprēķina pēc formulas:

$$d^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} \left(\overline{x}_i - \overline{x}\right)^2 \cdot n_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i},$$

kur n_i – i-tās grupas vienību skaits;

$\overline{x}_i$ – i-tās grupas aritmētiskais vidējais;

$\overline{x}$ – visas kopas aritmētiskais vidējais.

Grupu vidējā dispersija (grupu iekšējā dispersija) $\overline{S}_i^2$ parāda nejaušo variāciju, t. i., variācijas daļu, kas radusies vērā neņemtu faktoru ietekmē un kas nav atkarīga no grupēšanas pamatā ieliktās pazīmes – faktora. To aprēķina kā svērto aritmētisko vidējo atsevišķu grupu dispersijām:

$$\overline{S}_i^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} S_i^2 n_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i},$$

kur k – grupu skaits, kas jāsummē pa visām grupām;

$i = 1, 2, 3, \ldots, k$.

Jāatzīmē, ka grupu iekšējā dispersija un starpgrupu dispersija atšķirībā no atsevišķo grupu dispersijām aptver visu statistisko kopu, bet neietver visu kopas variāciju. Katra no šīm dispersijām raksturo kopas variāciju citā aspektā un no cita analīzes uzdevuma.

Grupu iekšējā dispersija izsaka tās variācijas lielumu, kas pēc kopas sadalīšanas grupās saglabājas šo grupu ietvaros, bet starpgrupu dispersija rāda, cik liela pētāmajā kopā ir variācija starp atsevišķo grupu aritmētiskajiem vidējiem lielumiem.

Matemātiski ir pierādīts, ka **grupu vidējās dispersijas** (grupu iekšējās dispersijas) $\overline{S}_i^2$ **un starpgrupu dispersijas** d^2 **summa ir vienāda ar kopējo dispersiju** δ^2:

$$\overline{S}_i^2 + d^2 = \delta^2.$$

Ja no trijām savstarpēji saistītām dispersijām ir aprēķinātas divas, tad trešo var aprēķināt, izmantojot iepriekšējo savstarpējo sakarību.

Visas kopas svērto aritmētisko vidējo var aprēķināt no grupu aritmētiskajiem vidējiem $\bar{x}_i$, tos sverot ar grupu vienību skaitu n_i:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} \bar{x}_i n_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i}.$$

Sakarību starp grupu vidējo dispersiju un kopējo dispersiju sauc par **dispersiju skaitīšanas teorēmu**.

Ja salīdzina starpgrupu dispersijas, grupu vidējās dispersijas un kopējās dispersijas formulas, redzams, ka visas dispersijas aprēķina, dalot noviržu kvadrātu summas ar vienu un to pašu kopas vienību skaitu n vai $\sum f \sum f$. Tā kā vienādības abas puses var reizināt ar kopas vienību skaitu un secināt, ka arī noviržu kvadrātu summas veido līdzīgu sakarību: kopējā noviržu kvadrātu summa ir vienāda ar starpgrupu noviržu kvadrātu summu plus grupu vidējo noviržu kvadrātu summu.

Statistikas analīzē plaši lieto rādītāju, kas parāda starpgrupu dispersijas daļu kopējā dispersijā. To sauc par **empīrisko determinācijas koeficientu**, ko apzīmē ar n^2 un aprēķina pēc formulas:

$$n^2 = \frac{d^2}{\delta^2}.$$

Empīriskā determinācijas attiecība raksturo, cik lielā mērā (vai par cik procentiem) rezultatīvās pazīmes variāciju izskaidro ar grupēšanas pamatā ņemto faktoriālās pazīmes variāciju.

Kvadrātsakni no starpgrupu dispersijas un kopējās dispersijas attiecības (kvadrātsakni no empīriskās determinācijas attiecības) sauc par **empīrisko korelācijas attiecību**, to apzīmē ar η un aprēķina pēc formulas:

$$\eta^2 = \frac{d^2}{\delta^2}.$$

Empīriskās korelācijas attiecība var svārstīties robežās no 0 līdz 1. Jo ciešāka ir sakarība starp faktoriālo un rezultatīvo pazīmi, jo η nozīme ir tuvāk vienam, un otrādi – jo vājāka ir sakarība starp pētāmajām pazīmēm, jo η nozīme ir tuvāk nullei.

Tātad, ja $\eta = 0$, tad grupēšanas pazīme neietekmē rezultatīvo pazīmi. Ja $\eta = 1$, tad rezultatīvā pazīme mainās tikai atkarībā no pazīmes, kura ir grupēšanas pamatā, bet pazīmes pārējo faktoru ietekme ir vienāda ar nulli. Starpnozīmes vērtē atkarībā no tuvuma robežnozīmēm. Ja starp pētījumā saistītajām pazīmēm nav sakarības, tad $\delta^2 = 0$ un arī $\eta = 0$.

Piemērs.

N uzņēmumā nodarbināto skaits un vidējais vecums

Dzimums	Vidējais vecums, gadi	Darbinieku skaits	Grupu dispersijas	Kopējais gadu skaits, cilvēku gadi	$(\bar{x}_i - \bar{x})$, gadi	$(\bar{x}_i - \bar{x})^2 n_i$	$S_i^2 n_i$
	$\bar{x}_i$	n_i	S_i^2	$\bar{x}_i n_i$			
Vīrieši	39	250	194,5	9750	–1,7	722,5	48 625
Sievietes	42,1	294	269,0	12 377,4	1,4	576,2	79 086
Kopā	–	544		22 127,4		1298,7	127 711

Nodarbināto vidējais vecums: $x = \dfrac{22\,127{,}4}{544} = 40{,}7$ gadi.
Nodarbināto vecuma

- starpgrupu dispersija: $d^2 = \dfrac{\sum(\bar{x}_i - \bar{x})^2 n_i}{\sum n_i} = \dfrac{1298{,}7}{544} = 2{,}39;$
- grupu vidējā dispersija: $S_i^2 = \dfrac{12\,7711}{544} = 234{,}76;$
- kopējā dispersija: $\delta^2 = 2{,}39 + 234{,}76 = 237{,}15;$
- kopas standartnovirze: $\delta = S = \sqrt{237{,}15} = 15{,}4$ gadi;
- variācijas koeficients, %: $k_{\text{var}} = \dfrac{\delta(S)}{x} = \dfrac{15{,}4}{40{,}7}100 = 37{,}8$ %;
- empīriskais determinācijas koeficients, %: $\eta^2 = \dfrac{d^2}{\delta^2} = \dfrac{2{,}39}{237{,}15}100 = 1{,}0$ %.

  grupēšanas pazīmes (vīriešu un sieviešu) variācijas īpatsvars pētāmās pazīmes (vidējā vecuma) kopējā variācijā ir mazs – 1 %;
- empīriskā korelācijas attiecība, %: $\eta = \sqrt{\dfrac{d^2}{\delta^2}} = \sqrt{\dfrac{2{,}39}{237{,}15}}100 = 10{,}0$ %.

  Darbinieku dzimuma faktors izskaidro 10,0 % no vecuma variācijas, bet neizskaidrotie faktori ir 90,0 % (100 % − 10,0 %).

Pārbaudes jautājumi

1. Ko izsaka variācija?
2. Kādus lielumus izmanto variācijas mērīšanai?
3. Kas ir amplitūda, un kādos gadījumos to var noteikt precīzi, kādos – tikai aptuveni?
4. Kas ir dispersija un standartnovirze?
5. Izskaidrojiet, kas ir procentile un kvartile!

Uzdevumi

1. uzdevums. N uzņēmumā nodarbināto skaits un vidējais vecums (nosacīti dati).

Dzimums	Vidējais vecums, gadi	Nodarbināto skaits, cilv.	Grupu dispersija
Vīrieši	39,0	250	194,5
Sievietes	42,1	294	269,0
Kopā		544	

Aprēķināt:

1) N uzņēmumā nodarbināto vidējo vecumu;
2) nodarbināto vecuma
   a) starpgrupu dispersiju,
   b) grupu vidējo dispersiju,
   c) kopējo dispersiju,
   d) standartnovirzi,
   e) variācijas koeficientu (procentos),
   f) empīrisko determinācijas koeficientu,
   g) empīrisko korelatīvo attiecību.

7. IZLASES NOVĒROŠANA

7.1. Izlases metodes būtība

Statistikā izlases metode ir viena no pētīšanas metodēm. Atkarībā no objekta vienību aptveres pilnīguma izšķir:

- pilno novērošanu,
- nepilno novērošanu.

Pilnajā novērošanā tiek aptvertas visas pētāmās kopas vienības.

Nepilnās novērošanas pamats ir izlases novērošana, kuru tirgus ekonomikas apstākļos aizvien vairāk lieto visu valstu statistikas iestādes.

Izlases metode ir pētīšanas metode, pēc kuras, novērojot tikai daļu no pētāmā objekta vienībām, iespējams iegūt reprezentatīvus pētāmo objektu raksturojošus rādītājus. Izlases metodes matemātiskais pamats ir varbūtības teorija.

Izmantojot izlases metodi, novēro pietiekami daudz nejauši atlasītu kopas vienību un iegūtos rezultātus attiecina uz visu kopu.

Nejaušības jeb vienādu iespēju princips ir svarīgākais apstāklis, ar ko izlases novērošana atšķiras no citiem nepilnās novērošanas veidiem. Salīdzinājumā ar pilno novērošanu izlases novērošanai ir dažas svarīgas priekšrocības. Statistikā izlases novērošanu lieto dažādu iemeslu dēļ:

- **ātrāk var iegūt nepieciešamo statistisko informāciju**, ātrāk var veikt datu sakopošanu un analīzi. Tas ir sevišķi svarīgi tad, kad tiek vākta operatīvā informācija, kas ātri noveco. Statistiskos pētījumos laika faktoram ir būtiska nozīme, it īpaši šobrīd, kad strauji mainās sociālekonomiskā situācija;
- **var ietaupīt ievērojamus naudas līdzekļus** un darbaspēka izmaksas. Tas ļauj izlases novērošanā piesaistīt kvalificētākus darbiniekus, samazināt kļūdas, it sevišķi, vācot sākotnējo informāciju, t. i., izdarot faktu reģistrāciju;
- **iespējams paplašināt novērošanas programmu**, jo novērošanai tiek pakļauta tikai neliela daļa no visām kopas vienībām, un tāpēc iespējams detalizētāk izpētīt atsevišķas vienības.

Novēroto vienību skaitu un novērošanas programmu saista šāds vispārīgs princips: jo plašāka un sarežģītāka ir novērošanas programma, jo mazākai jābūt novērojamai kopai; un otrādi – jo lielāks ir novērojamo objektu vienību skaits, jo šaurākai un vienkāršākai jābūt novērošanas programmai.

Izlases metode būtiski paplašina un padziļina statistiskās pētīšanas iespējas. Izmantojot **pilno** novērošanu, nav iespējams organizēt plašus socioloģiskus pētījumus. Piemēram, pētot produkcijas kvalitāti, nevar pārbaudīt visu pārtikas produktu, elektropreču un citu preču kvalitāti; mājsaimniecību budžetu pētījumos nevar apsekot visas mājsaimniecības.

Ja kopas pilnīga novērošana nav iespējama, vienīgais veids, kā iegūt informāciju, ir izlases novērošana. Šāds stāvoklis galvenokārt rodas divos gadījumos:

- statistiskā kopa ir ļoti liela,
- novērošanas procesā kopas vienības tiek bojātas vai iznīcinātas (nosakot spuldžu degšanas ilgumu, degustējot pārtikas produktus, pārbaudot audumu stiprība u. c.).

Svarīgākais apstāklis, kas samazina izlases novērošanas pozitīvās īpašības un ierobežo tās praktisko lietošanu, ir tas, ka izlases veidā iegūtie novērošanas materiāli satur **reprezentācijas kļūdu**. Šīs kļūdas noteikšana un samazināšana ir galvenā izlases metodes teorijas un prakses problēma.

Izlases kopa (izlase) ir ģenerālās kopas daļa, kura nodalīta statistiskai novērošanai, lai spriestu par visas ģenerālās kopas īpašībām.

Ģenerālā kopa ir pētāmā objekta visu vienību kopums. Ģenerālā kopa var būt galīga un eksistēt reāli, piemēram, visi Latvijas studenti, visi noguldījumi u. c. Tā var būt arī neierobežota (hipotētiska kopa), piemēram, visi zivju konservi, ko ražo rūpnīcas.

Hipotētiskas kopas veido visi speciāli organizētie eksperimenti, jo teorētiski tos var atkārtot neierobežoti.

7.2. Izlases veidi un novērošanas vienību atlases paņēmieni

Pēc izlases datiem aprēķināto rādītāju ticamība lielā mērā ir atkarīga no atlases paņēmieniem. Katram izlases veidam ir specifiska novērojamo vienību atlases metodika. Atkarībā no vienību atlases tehnikas tā var būt:

- loterijveida atlase,
- mehāniskā atlase.

Loterijveida atlases būtību izsaka jau pats nosaukums. Lietojot šo atlasi, katrai ģenerālās kopas vienībai izgatavo noteikta veida loterijas zīmi (lozi). Visas zīmes (lozes) ievieto noteiktā traukā, rūpīgi samaisa un izvelk nepieciešamo skaitu ložu ar vienību nosaukumiem. Loterijveida atlase ir darbietilpīgs process, it sevišķi tad, ja ir liela ģenerālā kopa. Tāpēc praksē lozes aizstāj ar **nejaušo skaitļu tabulām**, kuras tiek publicētas. Var arī izmantot skaitļošanas tehniku. Šādā tabulā ir ciparu sērijas, kuras mainās nejaušā veidā un tiek atlasītas ar elektronisko signālu palīdzību. Tā kā ir 10 ciparu sistēma no 0 līdz 9, tad jebkura cipara parādīšanās varbūtība ir 1 : 10. Līdz ar to, ja vajadzētu radīt nejaušo skaitļu tabulu, kurā ir 1000 zīmju, tad 100 zīmes būtu 0, tikpat daudz zīmju būtu 1, 2, …, 9 utt. Ņemot vērā, ka katrs cipars un tā secība ir nejauši, var izmantot nejaušo skaitļu tabulu, pārvietojoties pa vertikāli vai horizontāli.

Mehāniskās atlases princips ir šāds: sastāda visas ģenerālās kopas vienību sarakstu un secību. No ģenerālās kopas ik pēc noteikta intervāla atlasa vienu vienību (piemēram, 7, 15 utt.), tādējādi izveidojot nepieciešamo izlases kopu.

Vienību atlase var būt:

- atkārtota,
- neatkārtota.

Atkārtotā atlasē vienu reizi atlasītās vienības pēc to pazīmju reģistrēšanas atkal no jauna pievieno ģenerālajai kopai, tāpēc tās var atlasīt vairākas reizes. Atkārtotā atlasē ģenerālās kopas apjoms visu laiku paliek nemainīgs.

Neatkārtotā atlasē vienu reizi atlasītās vienības turpmākajā procesā nepiedalās.
Vienības var atlasīt:

- tieši no visas ģenerālās kopas,
- atsevišķi no ģenerālās kopas grupām (ja ģenerālā kopa pirms atlases sadalīta grupās).

Tātad iespējami trīs kopas vienību atlases paņēmieni:

- nejaušā atlase,
- vienību atlase pēc noteiktas shēmas,
- pirmā un otrā atlases paņēmiena apvienojums.

Atlases dažādos paņēmienus parasti nelieto atsevišķi, tos apvieno un savstarpēji kombinē, izveidojot kādu noteiktu izlases veidu.

Plašāk pazīstamie izlases veidi ir:

- īsti nejaušā izlase,
- mehāniskā izlase,
- tipoloģiskā (stratificētā) izlase,
- sērijveida (ligzdveida) izlase,
- kombinētā izlase,
- daudzpakāpju izlase,
- daudzfāžu izlase.

Īsti nejaušā izlasē (vienkāršā gadījumizlasē) vienības atlasa no visām ģenerālās kopas vienībām bez to iepriekšējas grupēšanas un atlases vienība sakrīt ar novērošanas vienību. Vienkāršā gadījumizlase vislabāk nodrošina visu kopas vienību nokļūšanu izlasē.

Pirms atlases precīzi jānosaka ģenerālās kopas robežas.

Mehānisko izlasi lieto gadījumos, kad ģenerālā kopa ir sakārtota kādā noteiktā veidā. Svarīga nozīme mehāniskajā izlasē ir atlases sākuma noteikšanai, t. i., tās vienības kārtas numura noteikšanai pirmajā intervālā, no kuras jāsāk vienību mehāniskā atlase.

Ja izlases pamatā ir **ranžēts** vienību sakārtojums, tad atlasi sāk no pirmā intervāla vidū esošās vienības, tādējādi izlases kopā iekļaujot visu intervālu centrālās vienības. Tādā veidā var novērst sistemātiskās izlases kļūdas rašanos. Mehānisko izlasi plaši lieto, ja atlase jāizdara no **neierobežotas** (hipotētiskas) ģenerālās kopas. Šajā gadījumā visu vienību sarakstu nav iespējams sastādīt, un līdz ar to nav iespējama vienību atlase. Piemēram, iztaujājot Latvijā iebraukušos tūristus par iztērētajām naudas summām, var iztaujāt katru 5., 30., 100. tūristu utt.

Tipoloģisko (stratificēto) izlasi statistikā plaši lieto gadījumos, kad ģenerālās kopas vienības var sadalīt vairākās tipiskās grupās (piemēram, visas mājsaimniecības var sadalīt pilsētu, lauku, strādājošo, pensionāru, studentu mājsaimniecībās). Tipoloģiskās izlases galvenais uzdevums ir sadalīt ģenerālo kopu daļās, kuras pēc sava rakstura vairāk atšķiras cita no citas, tāpēc variācija šādu grupu iekšienē ir niecīga.

Sērijveida izlasē, gluži pretēji, ģenerālo kopu sadala pēc iespējas vienāda rakstura daļās, kur katrā sērijā saglabājas apmēram tāda pati iekšējā struktūra, kāda tā ir visā ģenerālajā kopā. Tā rezultātā vidējie lielumi atlasītajās sērijās cits no cita maz atšķiras un starpsēriju dispersija ir niecīga. Prakse rāda, ka sērijveida izlase parasti ir mazāk reprezentatīva nekā īsti nejaušā izlase.

Kombinētajā izlasē var kombinēt tipoloģisko un sērijveida izlasi. Iespējama ir sērijveida un vienkāršās gadījuma izlases kombinācija.

Daudzpakāpju izlases kopu veido pakāpeniski. Vispirms no ģenerālās kopas atlasa lielāka apjoma sērijas, tad no šīm sērijām atlasa mazāka apjoma sērijas, bet no tām – vēl mazāka apjoma sērijas utt. No pēdējās izlases atlasa tās vienības, kas paredzētas tieši novērošanai. Daudzpakāpju izlase ir vieglāka un lētāka salīdzinājumā ar vienpakāpes izlases organizāciju. Trūkums ir tas, ka tā ir mazāk reprezentatīva.

Piemēram, ja no visiem 75 368 Latvijas studentiem 2022./2023. mācību gadā nolemts novērot 5000 studentu sekmes, tad var rīkoties divējādi:

- sastādīt visu studentu sarakstu un mehāniski atlasīt katru 22. studentu;
- vispirms atlasīt noteiktu studentu skaitu visās augstskolās, tad katrā atlasītajā augstskolā atlasīt fakultātes, un tikai tad no šīm fakultātēm atlasīt katru 22. studentu.

7.3. Izlases novērošanas kļūdas

Izlases metodes lietošanā var rasties divu veidu novērošanas kļūdas:

- reģistrācijas kļūdas,
- izlases (reprezentācijas) kļūdas.

Reģistrācijas kļūdas iedala:

- nejaušajās kļūdās,
- sistemātiskajās kļūdās.

Izlases (reprezentācijas) kļūdas saistītas ar izlases novērošanu un rodas tāpēc, ka izlases kopa nepilnīgi atdarina ģenerālo kopu. Izvairīties no izlases kļūdām nevar, bet tās var samazināt līdz minimumam.

Izlases kļūdas arī var būt:

- sistemātiskas,
- nejaušas.

Sistemātiskās kļūdas rodas, ja izlase organizēta nepareizi vai vienkāršoti, piemēram, neprecīzi uzdots jautājums, vienas personas vietā aptaujāta cita utt.

Nejaušo kļūdu rašanās saistīta ar to, ka izlase neatbilst visai kopai. Ir iespējams aprēķināt nejaušo izlases kļūdu varbūtējos lielumus. Parasti ir tā – jo lielāka izlase, jo mazāka izlases kļūda.

Faktiski katrai izlasei ir sava izlases kļūda. Izlases kļūdu var izteikt:

- absolūtās mērvienībās,
- relatīvās mērvienībās.

Izlases aritmētisko vidējo **absolūto kļūdu** izsaka tādās pašās mērvienībās, kādās ir izlases kopas sākotnējie dati un aritmētiskais vidējais lielums (naudas, naturālās un citās mērvienībās).

Relatīvo kļūdu izsaka procentos vai skaitļa 1 daļās. Par aritmētiskā vidējā absolūtās kļūdas rādītājiem izmanto:

- standartkļūdu ($S_{\overline{x}}$),
- robežkļūdu ($\Delta_{\overline{x}}$).

Izlases aritmētiskā vidējā standartkļūdas kvadrāts (izlases vidējā dispersija) ir tieši proporcionāls pazīmes X ģenerālās kopas dispersijai δ^2 un apgriezti proporcionāls izlases lielumam n:

$$S_{\overline{x}}{}^2 = \frac{\delta^2}{n}.$$

Tātad **izlases aritmētiskā vidējā standartkļūda** ir:

$$S_{\overline{x}} = \sqrt{\frac{\delta^2}{n}} = \frac{\delta}{\sqrt{n}},$$

kur $S_{\overline{x}}$ – izlases aritmētiskā vidējā standartkļūda;

δ – ģenerālās kopas standartnovirze;

n – vienību skaits izlasē.

Līdz ar to izlases standartkļūda ir jo lielāka, jo lielāka ir ģenerālās kopas variācija; tā ir jo mazāka, jo lielāks ir izlases apjoms.

Izlases aritmētiskā vidējā novirze no ģenerālās kopas aritmētiskā vidējā ir vienāda ar **robežkļūdu** $\Delta_{\overline{x}}$. To aprēķina, reizinot standartkļūdu $S_{\overline{x}}$ ar varbūtības koeficientu t, kuru atbilstoši **brīvi izvēlētai varbūtībai** P nolasa normālā sadalījuma tabulās.

Ja izlase ir maza ($n < 50$), izmanto t sadalījuma (Stjūdenta) tabulas:

$$\Delta_{\overline{x}} = tS_{\overline{x}}.$$

Īsti nejaušai neatkārtotai izlasei aritmētisko vidējo robežkļūdu aprēķina pēc formulas:

$$\Delta_{\bar{x}} = t\sqrt{\frac{S^2}{n}\left(1-\frac{n}{N}\right)}.$$

Relatīvās kļūdas rādītājs β ir absolūtās kļūdas attiecība pret aritmētisko vidējo, un to parasti izsaka %. Līdz ar to var aprēķināt divu veidu relatīvās kļūdas:

- pirmo, pamatojoties uz standartkļūdu:

$$\beta = \frac{S_{\bar{x}}}{\bar{x}}100;$$

- otro, pamatojoties uz robežkļūdu:

$$\beta = \frac{\Delta_{\bar{x}}}{\bar{x}}100.$$

Varbūtību, kuru pieņem izlases raksturojumu kļūdas aprēķinā, sauc par **uzticēšanās varbūtību**.

Relatīvā biežuma izlases kļūdas un vērtējuma robežas nosaka tāpat kā aritmētiskajam vidējam, tikai alternatīvās pazīmes **dispersiju** rēķina pēc specifiskas formulas:

$$S_w{}^2 = w(1-w),$$

kur w – relatīvais biežums izlasē (izlases daļa).

Izlases relatīvajam biežumam **aritmētiskā vidējā standartkļūdu** aprēķina pēc formulas:

$$S_w = \sqrt{\frac{w(1-w)}{n}}.$$

Lai aprēķinātu aritmētiskā vidējā robežkļūdu, standartkļūdu reizina ar varbūtības koeficientu t.

Izlases relatīvā biežuma **robežkļūdu** aprēķina pēc formulas:

$$\Delta_w = tS_w\sqrt{\frac{w(1-w)}{n}}.$$

Dažām biežāk lietotām varbūtībām lielas izlases gadījumā atbilst šādi varbūtības koeficienti:

Varbūtība	P	0,683	0,90	0,954	0,99
Varbūtības koeficients	t	1	1,64	1,96 ≈ 2	2,58 ≈ 3

Tos var atrast normālā sadalījuma tabulās.

Ja vienību atlase notiek neatkārtotas izlases veidā, izlases relatīvā biežuma robežkļūdas ar pieņemto varbūtību aprēķina pēc formulas:

$$\Delta_w = t\sqrt{\frac{w(1-w)}{n}\left(1-\frac{n}{N}\right)}.$$

Vērtējuma robežas ir:

$$\Delta - \Delta_w < p < w + \Delta_w.$$

Izlases standartkļūdas un robežkļūdas formulas ir savstarpēji saistītas.

Robežkļūda ietver arī **standartkļūdu** un atšķiras no tās tikai ar lielumu *t*.

Risinot praktiskus uzdevumus, parasti vispirms aprēķina izlases robežkļūdu un pēc tam no tās aprēķina standartkļūdas lielumu.

Standartkļūda ir lielums, kas attiecīgajā robežkļūdas formulā atrodas pa labi no varbūtības koeficienta *t*.

Piemērs.

Robežu diennaktī šķērsoja 600 tūristu. Tika organizēta 10 % liela mehāniska izlase, pēc kuras rezultātiem konstatēja, ka izlasē ietverto robežas šķērsotāju vidējais vecums ir 40 gadu, ka vecuma standartnovirze ir 5 gadi un ka 50 no apsekotajiem tūristiem ir vecāki par 30 gadiem.

Jāaprēķina ar varbūtību 0,95 šīs izlases absolūtā kļūda un relatīvā robežkļūda, nosakot tūristu vidējo vecumu un par 30 gadiem vecāku tūristu relatīvo biežumu.

Šajā piemērā: $N = 600$; $n = 0{,}1 \cdot 600 = 60$; $s = 5$; $s^2 = 5^2 = 25$; $m = 50$; $w = m / n = 50 / 60 = 0{,}833$; $\bar{x} = 40$; $P = 0{,}95$; $t = 1{,}96$.

1. **Absolūtā robežkļūda**:
   a) nosakot tūristu vidējo vecumu:
   $$\Delta_{\bar{x}} = t\sqrt{\frac{S^2}{n}\left(1-\frac{n}{N}\right)} = 1{,}96\sqrt{\frac{25}{60}\left(1-\frac{60}{600}\right)} = 1{,}96 \cdot 0{,}58 = 1{,}14 \text{ gadi};$$
   b) nosakot par 30 gadiem vecāku tūristu relatīvo biežumu:
   $$\Delta_w = t\sqrt{\frac{w(1-w)}{n}\left(1-\frac{n}{N}\right)} = 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}833-(1-0{,}833)}{60}}\left(1-\frac{60}{600}\right) =$$
   $$= 1{,}96 \cdot 0{,}0457 = 0{,}0896 = 8{,}96\ \%.$$
2. **Relatīvā robežkļūda**:
   a) nosakot tūristu vidējo vecumu:
   $$\beta_{\bar{x}} = \frac{\Delta_{\bar{x}}}{\bar{x}}100 = \frac{1{,}14}{40}100 = 0{,}0285 = 2{,}85\ \%;$$
   b) nosakot par 30 gadiem vecāku tūristu relatīvo biežumu:
   $$\beta_w = \frac{\Delta_w}{w}100 = \frac{0{,}0896}{0{,}833} = 0{,}1076 = 10{,}76\ \%.$$
3. **Ticamības intervāla robežas**:
   a) nosakot tūristu vidējo vecumu:
   $$\bar{x} - \Delta_{\bar{x}} \leq \bar{x} \leq \bar{x} + \Delta_{\bar{x}},$$
   $$40 - 1{,}14 \leq \bar{x} \leq 40 + 1{,}14,$$

$$38{,}86 \le \bar{x} \le 41{,}14,$$

$$38{,}9 \le \bar{x} \le 41{,}1 \text{ gads.}$$

Ar varbūtību 0,95 var garantēt, ka tūristu vidējais vecums nav mazāks par 38,9 gadiem un nav lielāks par 41,1 gadu;

b) nosakot par 30 gadiem vecāku tūristu relatīvo biežumu:

$$w - \Delta_w \le w \le w + \Delta_w,$$

$$0{,}833 - 0{,}1076 \le w \le 0{,}833 + 1{,}1076,$$

$$0{,}7254 \le w \le 0{,}9406,$$

aprēķinot procentos, iegūst $72{,}5\ \% \le w \le 94{,}1\ \%$.

Ar tādu pašu varbūtību var garantēt, ka 30 gadus pārsniegušo tūristu īpatsvars apsekoto 50 tūristu skaitā nav mazāks par 72,5 % un nav lielāks par 94,1 %.

7.4. Nepieciešamā izlases lieluma aprēķināšana

Izlases lielums jānosaka pirms novērošanas sākuma. Nosakot izlases apjomu, jāaprēķina, cik vienības jānovēro, lai iegūtie rezultāti būtu reprezentatīvi un atbilstu pētījumā izvirzītajām prasībām.

Nepieciešamais izlases apjoms ir atkarīgs no:

- **pazīmes variācijas** (δ vai w). Jo lielāka ir pazīmes variācija, jo lielākam jābūt izlases kopumam;
- **izlases novērošanā iegūto rezultātu ticamības garantijas**, t. i., no koeficienta t lieluma. Jo lielāku varbūtību vēlas garantēt, jo vairāk vienību jānovēro;
- **izlases kļūdas lieluma**, t. i., no absolūtās $\Delta_{\bar{x}}$ vai relatīvās $\Delta_{\bar{w}}$ lieluma, kādu maksimāli drīkst pieļaut, lai izlasē iegūtie rezultāti būtu reprezentatīvi. Jo mazāka ir maksimāli pieļaujamā kļūda, jo lielākam jābūt izlases apjomam.

Līdztekus šiem galvenajiem faktoriem izlases apjoms zināmā mērā ir atkarīgs arī no tā, kādus vienību atlases paņēmienus izvēlas un kāds ir izlases veids.

Nepieciešamā izlases lieluma formula dažādiem atlases paņēmieniem tiek atvasināta no izlases robežkļūdas formulas:

$$\Delta_{\bar{x}} = tS_{\bar{x}} = t\frac{\delta}{\sqrt{n}}.$$

Vienkāršai atkārtotai gadījumizlasei nepieciešamo vienību skaitu aprēķina pēc formulas:

$$n = \frac{t^2\delta^2}{\Delta_{\bar{x}}^2},$$

kur $\Delta_{\bar{x}}$ – pieļaujamā robežkļūda, kuru nosaka atkarībā no pieprasītās izlases rezultātu precizitātes;
t – varbūtības koeficients;
δ^2 – ģenerālās kopas dispersija.

Izlases apjoma plānošanā ir dažas praktiskas grūtības. Aprēķinot nepieciešamo izlases apjomu, jāzina ģenerālā kopuma dispersija δ^2, kas, plānojot izlasi, vēl nav zināma. Vienīgā iespēja ir izmantot kādu citu tās vērtējumu:

- iepriekšējo apsekojumu rezultātus,
- ekspertīzes vērtējumu.

Tāpēc aprēķina formulā izmanto apzīmējumu S^2, nevis δ^2.

Neatkārtotas gadījumizlases nepieciešamo vienību skaitu aprēķina pēc formulas:

$$n = \frac{t^2 S^2 N}{t^2 S^2 + \Delta_{\bar{x}}^2 \cdot N},$$

kur $\Delta_{\bar{x}}^2$ – pieļaujamā robežkļūda;
t – varbūtības koeficients;
S^2 – izlases dispersija;
N – vienību skaits ģenerālajā kopā.

Piemērs.

Pētot viesu vidējo uzturēšanās ilgumu viesnīcās, no 88 viesnīcām jāatlasa noteikts viesnīcu skaits, lai izlases kļūda ar varbūtību 0,683 nepārsniegtu trīs diennaktis. Dispersija (S^2) pēc ekspertu vērtējuma ir 225. Aprēķinam tiek izmantots mehāniskās atlases princips.

Nepieciešamais apsekoto viesnīcu skaits:

$$n = \frac{1 \cdot 225 \cdot 88}{1 \cdot 225 + 3^2 \cdot 88} = \frac{19\,800}{1017} = 19 \text{ viesnīcu.}$$

Pārbaudes jautājumi

1. Kad izmanto statistisko izlases novērošanu? Kāpēc?
2. Kādi atlases paņēmieni Jums ir zināmi? Īsi raksturojiet katru no tiem!
3. Kas ir tipoloģiskā izlase, un kad to izmanto?
4. Kā veido daudzpakāpju izlases kopu?
5. Nosauciet biežāk pieļautās izlases novērošanas kļūdas!
6. Kā aprēķina nepieciešamo izlases lielumu?

Uzdevumi

1. uzdevums. Muitā tika pārbaudīta importa krava. Pēc atkārtotas atlases paņēmiena tika atlasīti 225 izstrādājumi. Tika konstatēts, ka vidējais izstrādājuma svars ir 40 g ar vidējo kvadrātisko novirzi 6 g. Ar varbūtību 0,997 jāaprēķina robežas, kurās atrodas vidējais svars!

2. uzdevums. Mehāniskās izlases ceļā pie dzelzceļa kasēm dažādās dienās tika aptaujāti 3000 pasažieru, aptaujājot katru desmito. Aptaujāto vidū 1200 bija Rīgas iedzīvotāji.

Aprēķināt:

1) izlases relatīvo robežkļūdu ar varbūtību 0,99;
2) robežas, kādās ir sagaidāms pasažieru–rīdzinieku īpatsvars kopējā pasažieru skaitā.

3. uzdevums. Kopējais iedzīvotāju skaits N pilsētā ir 1980 cilvēku. Tika organizēta 10 % mehāniskā izlase, pēc kuras rezultātiem konstatēja, ka izlasē ietverto cilvēku vidējais vecums ir 46 gadi, ka vecuma standartnovirze ir 5 gadi un ka 60 no apsekotajiem iedzīvotājiem ir vecāki par 35 gadiem.

Aprēķināt:

1) izlases absolūto un relatīvo robežkļūdu ar varbūtību 0,95, nosakot:
   a) iedzīvotāju vidējo vecumu,
   b) par 35 gadiem vecāku iedzīvotāju relatīvo biežumu;
2) ticamības intervāla robežas, nosakot:
   a) iedzīvotāju vidējo vecumu,
   b) par 35 gadiem vecāku iedzīvotāju relatīvo biežumu.

4. uzdevums. Pasažieru vērtējums par tramvaju kustību pilsētā (nosacīti dati).

Lai noskaidrotu pasažieru vērtējumu par tramvaju kustību pilsētā, tika organizēta mehāniskā izlase. Kādā no pieturām aptaujāja katru piekto tramvaja gaidītāju, uzdodot divus jautājumus:

- Cik ilgi parasti gaidāt tramvaju?
- Vai esat apmierināts(-a) ar šīs tramvaja līnijas kustības grafiku?

Pavisam tika aptaujāti 200 tramvaja pasažieru. Apkopojot sniegtās atbildes, tika konstatēts, ka tramvaja pasažieru vidējais gaidīšanas laiks ir 10 minūtes ar standartnovirzi ±4 minūtes un ka puse no aptaujātajiem pasažieriem nav apmierināti ar šīs tramvaja līnijas kustības grafiku.

Aprēķināt:

1) izlases standartkļūdu, nosakot:
   a) vidējo tramvaja gaidīšanas ilgumu,
   b) ar tramvaja kustības grafiku neapmierināto pasažieru relatīvo biežumu;
2) izlases absolūto robežkļūdu ar varbūtību 0,90, nosakot:
   a) vidējo tramvaja gaidīšanas ilgumu,
   b) ar tramvaja kustības grafiku neapmierināto pasažieru relatīvo biežumu;
3) izlases relatīvo robežkļūdu ar iepriekšējo varbūtību 0,90, nosakot:
   a) vidējo tramvaja gaidīšanas ilgumu,
   b) ar tramvaja kustības grafiku neapmierināto pasažieru relatīvo biežumu;
4) robežas, kurās ģenerālajā kopā atrodas:
   a) vidējais tramvaja gaidīšanas ilgums,
   b) ar tramvaja kustības grafiku neapmierināto pasažieru relatīvais biežums.

5. uzdevums. Pirkuma vidējās vērtības noteikšanai lielveikalā no 4000 pircējiem jāatlasa noteikts skaits pircēju, lai ar varbūtību 0,95 noteiktu pirkuma vidējo vērtību ar precizitāti ne mazāku par 3 EUR. Dispersija pēc ekspertu vērtējuma – 529. Aprēķiniet nepieciešamo atlasāmo pircēju skaitu!

8. DINAMIKAS RINDAS

8.1. Dinamikas rindas jēdziens un veidi

Statistika, izmantojot speciālu statistisko metožu sistēmu, kalpo sociālekonomisko parādību un procesu attīstības izpētei.

Dinamikas rindas ir skaitļu rindas, kas raksturo sabiedrisko parādību attīstību laikā. Dinamikas būtiska īpašība ir tās nepārtrauktība un secība. Dinamikas rindā locekļu secībai ir izšķiroša nozīme. Tajā nedrīkst mainīt hronoloģisko sakārtojumu, jo katrs nākamais loceklis dinamikas rindā ir cieši saistīts ar iepriekšējo locekli. Līdz ar to, ja maina hronoloģisko secību, zūd dinamikas jēga.

Dinamikas rindu veido divi galvenie elementi:

- laika periods (moments),
- pētāmās parādības attīstības līmenis.

Laika periodi ir vai nu noteikti datumi (momenti), vai arī atsevišķi periodi (diennaktis, mēneši, gadi u. c.).

Līmenis nosaka pētāmās parādības lielumu norādītajā laikā, un tas ir svarīgākais dinamikas rindas elements.

Dinamikas rindām var būt divējāds raksturs. Tās var raksturot parādības lielumu kādā laika periodā vai kādā laika momentā. Pirmās sauc par **intervālu** dinamikas rindām, otrās – par **momentu** dinamikas rindām.

Intervālu dinamikas rindu piemēri var būt sējumu platības, iekšzemes kopprodukta apjomi, eksporta apjomi, importa apjomi u. c.

Momentu dinamikas rindu piemēri var būt skaidrā nauda apgrozībā perioda beigās, iedzīvotāju skaits gada sākumā u. c.

Parasti par pietiekamu uzskata, ja dinamikas rindas ir par pieciem gadiem. Atkarībā no tā, ar kādiem lielumiem izteikti dinamikas rindas līmeņi, izšķir:

- absolūto lielumu dinamikas rindas,
- relatīvo lielumu dinamikas rindas,
- vidējo lielumu dinamikas rindas.

Absolūto lielumu dinamikas rindu līmeņi ir absolūtie lielumi, piemēram, valsts ārējā parāda apjoms, kapitālieguldījumu apjoms, kravu apgrozība, studentu skaits u. c.

Relatīvo lielumu dinamikas rindu līmeņi ir relatīvie lielumi, piemēram, rūpniecības produkcijas augšanas tempi, patēriņa cenu (inflācijas) indeksi, depozītu procentu likmes u. c.

Vidējo lielumu dinamikas rindu līmeņi ir vidējie lielumi, piemēram, izmaksāto pensiju vidējais apmērs, tautsaimniecībā nodarbināto iedzīvotāju gada vidējais skaits, lauksaimniecības kultūru vidējā ražība u. c.

Relatīvo un vidējo lielumu dinamikas rindas sastāv no aprēķinātiem statistiskajiem rādītājiem, kuri iegūti absolūto lielumu dalīšanas rezultātā.

Atkarībā no laika perioda dinamikas rindas iedala nepārtrauktajās un pārtrauktajās dinamikas rindās.

Nepārtrauktajās dinamikas rindās pētāmā parādība tiek ietverta pilnīgi. Pētāmās parādības izmaiņas, pārmaiņu raksturs, virzieni un īpatnības ir labi redzamas.

Pārtrauktajās dinamikas rindās nav zināms, kas noticis ar parādību laikā starp diviem periodiem.

Pārtrauktās dinamikas rindas iedala **vienādi plašu** un **dažādi plašu** pārtraukumu dinamikas rindās.

Dinamikas rindas vēl var iedalīt tiešajās un kumulatīvajās dinamikas rindās. **Tiešās** dinamikas rindas izsaka konkrēti minētajā laikā esošās parādības lielumu; **kumulatīvās** dinamikas rindas izsaka tiešos un iepriekšējos līmeņus, sākot no rindas sākuma. Jāatzīmē, ka kumulatīvās var būt tikai nepārtrauktās intervālu dinamikas rindas. Ja intervālu dinamikas rindā līmeņi ir izteikti relatīvajos vai vidējos lielumos, tieša to summēšana nav iespējama.

8.2. Dinamikas rindas līmeņu absolūto un relatīvo pārmaiņu rādītāji

Dinamikas rindas līmeņu absolūto un relatīvo pārmaiņu galvenie raksturojošie rādītāji ir šādi: absolūtais pieaugums (samazinājums), augšanas temps, pieauguma temps, pieauguma (samazinājuma) viena procenta absolūtā nozīme.

Dinamikas rindas rādītājus pēc to aprēķināšanas rakstura iedala ķēdes un bāzes rādītājos.

Ķēdes rādītāji ir dinamikas rādītāji ar mainīgu bāzi. Tie raksturo līmeņu pārmaiņu intensitāti no viena perioda uz otru periodu vai no viena momenta uz otru momentu pētāmā perioda ietvaros.

Ķēdes rādītājus aprēķina, secīgi salīdzinot (atņemot vai dalot) divus blakusesošus rindas līmeņus – sekojošo līmeni ar iepriekšējo līmeni. Ķēdes rādītāji nav atkarīgi no rindas garuma vai tās sākuma izvēles.

Bāzes rādītāji ir dinamikas rādītāji ar patstāvīgu bāzi. Tie raksturo rindas līmeņu visu izmaiņu galarezultātus salīdzinājumā ar periodu (momentu), kas pieņemts par bāzes periodu (momentu).

Bāzes rādītājus aprēķina, secīgi salīdzinot katru rindas līmeni ar vienu, par bāzi pieņemtu līmeni. Tas parasti ir konkrētās rindas pirmais, respektīvi, sākuma, līmenis, lai gan analīzes nolūkos par bāzes līmeni var pieņemt jebkuru citu līmeni rindas vidū. Ja rindu sāk ar laika periodu (momentu), kad pētāmai parādībai kaut kādu apstākļu dēļ bijis neraksturīgi augsts vai neraksturīgi zems līmenis, tad salīdzinājumā ar šādu sākuma līmeni aprēķinātie bāzes rādītāji būs maznoderīgi.

Vispārīgā veidā **dinamikas rindas līmeni** apzīmē ar Y. Ar

- Y_1 apzīmē rindas pirmo (sākuma) līmeni,
- Y_n apzīmē rindas pēdējo (beigu) līmeni,
- Y_m apzīmē jebkuru dinamikas rindas līmeni.

Piemērs.

Latvijas eksports, milj. EUR

Gads	2018	2019	2020	2021	2022
Eksporta apjoms	12 773,3	12 965,5	13 304,6	16 452,3	21 268,5

Absolūtais pieaugums (samazinājums) izsaka dinamikas rindas līmeņu absolūto pārmaiņu – palielināšanos vai samazināšanos – salīdzinājumā ar kādu sasniegtu līmeni. Izšķir ķēdes un bāzes absolūto pieaugumu.

Ķēdes absolūto pieaugumu (samazinājumu) aprēķina, no kāda dinamikas līmeņa atņemot šīs rindas iepriekšējo līmeni. Ķēdes absolūtais pieaugums ir:

$$\Delta_{m(\text{ķ})} = Y_m - Y_{m-1};$$

$$\Delta_{\text{ķ (2019)}} = 12965{,}5 - 12773{,}3 = 192{,}2 \text{ milj. EUR},$$

$$\Delta_{\text{ķ (2020)}} = 13304{,}6 - 12965{,}5 = 339{,}1 \text{ milj. EUR},$$

$$\Delta_{\text{ķ (2021)}} = 16452{,}3 - 13304{,}6 = 3147{,}7 \text{ milj. EUR},$$

$$\Delta_{\text{ķ (2022)}} = 21268{,}5 - 16452{,}3 = 4816{,}2 \text{ milj. EUR}.$$

Kopējais eksporta pieaugums no 2018. gada līdz 2022. gadam ir:

$$\sum \Delta_{\text{ķ}} = 8495{,}2 \text{ milj. EUR}.$$

Bāzes absolūto pieaugumu aprēķina, no kāda dinamikas rindas līmeņa atņemot rindas sākuma līmeni, ko uzskata par bāzi. Bāzes absolūtais pieaugums ir:

$$\Delta_{m(\text{b})} = Y_m - Y_1;$$

$$\Delta_{\text{b (2019)}} = 12965{,}5 - 12773{,}3 = 192{,}2 \text{ milj. EUR},$$

$$\Delta_{\text{b (2020)}} = 13304{,}6 - 12773{,}3 = 531{,}3 \text{ milj. EUR},$$

$$\Delta_{\text{b (2021)}} = 16452{,}3 - 12773{,}3 = 3679{,}0 \text{ milj. EUR},$$

$$\Delta_{\text{b (2022)}} = 21268{,}5 - 12773{,}3 = 8495{,}2 \text{ milj. EUR}.$$

Starp ķēdes un bāzes absolūtajiem pieaugumiem (samazinājumiem) ir šāda matemātiskā sakarība: ķēžu absolūto pieaugumu (samazinājumu) summa ir vienāda ar dinamikas rindas pēdējam līmenim atbilstošo bāzes absolūto pieaugumu (samazinājumu):

$$\sum_{m-1}^{n} \Delta m(\text{ķ}) = \Delta n(\text{b})\ ;$$

$$8495{,}2 \text{ milj. EUR} = 8495{,}2 \text{ milj. EUR}.$$

Rindas līmeņu pārmaiņu intensitātes rādītāju atkarībā no tā, vai tas izteikts koeficienta veidā vai procentos, sauc par **augšanas koeficientu** vai augšanas tempu. Augšanas koeficients rāda, cik reizes attiecīgais rindas līmenis ir lielāks par bāzes līmeni (ja koeficients ir lielāks par vienu) vai kādu bāzes līmeņa daļu veido pārskata perioda līmenis (ja koeficients ir mazāks par vienu).

Augšanas temps raksturo pētāmās parādības attīstības ātrumu.

Augšanas koeficients un augšanas temps ir līmeņu pārmaiņu intensitātes divas formas, un starpība starp tiem ir tikai mērvienībās:

$$\boxed{\begin{array}{c}\textit{augšanas}\\ \textit{koeficients}\end{array}} \cdot 100 = \boxed{\begin{array}{c}\textit{augšanas}\\ \textit{temps \%}\end{array}}$$

Ja pētāmās parādības **absolūtie līmeņi samazinās**, tad augšanas temps ir mazāks par 1 vai mazāks par 100 %, taču tas nekad nevar būt negatīvs skaitlis. Var būt ķēdes un bāzes augšanas tempi. Ķēdes augšanas tempu aprēķina, dalot kādu dinamikas rindas līmeni ar šīs rindas iepriekšējo līmeni:

$$T_{m(\text{ķ})} = \frac{Y_m}{Y_{m-1}};$$

$$T_{\text{ķ (2019)}} = \frac{12965{,}5}{12773{,}3} = 1{,}056 \text{ jeb } 105{,}6\,\%,$$

$$T_{\text{ķ (2020)}} = \frac{13304{,}6}{12965{,}5} = 1{,}026 \text{ jeb } 102{,}6\,\%,$$

$$T_{\text{ķ (2021)}} = \frac{16452{,}3}{13304{,}6} = 1{,}236 \text{ jeb } 123{,}6\,\%,$$

$$T_{\text{ķ (2022)}} = \frac{21268{,}5}{16452{,}3} = 1{,}292 \text{ jeb } 129{,}2\,\%.$$

Kopējo augšanas tempu par visu periodu aprēķina, reizinot visus augšanas tempus:

$$\left(T_{1(\text{ķ})} \cdot T_{2(\text{ķ})} \cdot T_{3(\text{ķ})} \cdot T_{4(\text{ķ})}\right);$$

$$T_{\text{ķ}(2019-2022)} = 1{,}056 \cdot 1{,}026 \cdot 1{,}236 \cdot 1{,}292 = 1{,}730 = 173{,}0\ \%.$$

Bāzes augšanas tempu aprēķina, dalot kādu dinamikas rindas līmeni ar rindas sākuma līmeni, ko uzskata par bāzi:

$$T_{m(\text{b})} = \frac{Y_m}{Y_1};$$

$$T_{\text{b}\,(2019)} = \frac{12965{,}5}{12773{,}3} = 1{,}015 \text{ jeb } 101{,}5\,\%,$$

$$T_{\text{b}\,(2020)} = \frac{13304{,}6}{12773{,}3} = 1{,}041 \text{ jeb } 104{,}1\,\%,$$

$$T_{\mathrm{b}\,(2021)} = \frac{16452,3}{12773,3} = 1,288 \text{ jeb } 128,8\,\%,$$

$$T_{\mathrm{b}\,(2022)} = \frac{21268,5}{12773,3} = 1,665 \text{ jeb } 166,5\,\%.$$

Starp ķēdes un bāzes augšanas tempiem ir šāda matemātiskā sakarība: secīgu ķēdes augšanas tempu reizinājums ir vienāds ar attiecīgo bāzes augšanas tempu:

$$T_{1(\mathrm{ķ})} \cdot T_{2(\mathrm{ķ})} \cdot \ldots \cdot T_{n(\mathrm{ķ})} = T_{n(\mathrm{b})}.$$

Savukārt bāzes augšanas tempu dalījums ir vienāds ar attiecīgo, tos atdalošo ķēdes augšanas tempu:

$$\frac{T_{m(\mathrm{b})}}{Y_{m-1(\mathrm{b})}} = T_{m(\mathrm{ķ})}.$$

Pieauguma koeficients izsaka, par kādu veselā daļu palielinājies vai samazinājies attiecīgais dinamikas rindas līmenis salīdzinājumā ar kādu citu jau sasniegtu līmeni, bet pieauguma temps izsaka, par cik procentiem tas palielinājies vai samazinājies. Pieauguma tempu aprēķina, atņemot no augšanas tempa 1 (ja lieto augšanas koeficientu) vai 100 % (ja augšanas temps ir izteikts procentos).

Pieauguma tempu aprēķina pēc šādām formulām:

$$t_{m(\mathrm{ķ})} = T_{m(\mathrm{ķ})} - 1 \text{ un } t_{m(\mathrm{b})} = T_{m(\mathrm{b})} - 1,$$

$$0,730 = 1,730 - 1,0;$$

$$t_{m(\mathrm{ķ})} = T_{m(\mathrm{ķ})} - 100\,\% \text{ un } t_{m(\mathrm{b})} = T_{m(\mathrm{b})} - 100\,\%,$$

$$73,0\,\% = 173,0\,\% - 100,0\,\%.$$

Atšķirībā no augšanas tempiem pieauguma tempi var būt arī negatīvi skaitļi. Tādā gadījumā tie izsaka, par kādu veselā daļu vai par cik procentiem pētāmās parādības līmenis ir pazeminājies. Praksē pieauguma tempus biežāk izsaka procentos, retāk – koeficientos.

Starp ķēdes un bāzes pieauguma tempiem nav matemātiskas sakarības.

Pieauguma (samazinājuma) 1 procenta absolūtā nozīme izsaka pieauguma (samazinājuma) tempa reālo saturu. Tam ir svarīga nozīme analīzē, jo praksē var būt augsti pieauguma tempi, bet niecīga parādības absolūtā palielināšanās; un otrādi – nelieli pieauguma tempi, bet ievērojams pieaugums. Pieauguma (samazinājuma) 1 procenta absolūto nozīmi aprēķina pēc šādām formulām:

$$t_{m(1\%)} = \frac{\Delta_{m(\mathrm{ķ})}}{t_{m(\mathrm{ķ})}} \text{ vai } t_{m(1\%)} = \frac{Y_n - Y_1}{\left(Y_n / Y_1\right)100 - 100},$$

$$t_{m(1\%)} = \frac{8495,2}{73,0} = 116,37 \text{ milj. EUR},$$

$$t_{m(1\%)} = \frac{21268,5 - 12965,5}{(21268,5 / 12965,5)100 - 100} = \frac{8495,2}{66,5} = 127,74 \text{ milj. EUR.}$$

8.3. Dinamikas rindu vidējie lielumi

Dinamikas rindu vidējie lielumi izsaka pētāmās parādības līmeņu un to pārmaiņu tipiskos lielumus noteiktā laika periodā.

Intervālu rindas vidējo līmeni aprēķina, dalot rindas līmeņu summu ar līmeņu skaitu:

$$\bar{Y} = \frac{\sum_{m=1}^{n} Y_m}{n} = \frac{Y_1 + Y_2 + Y_3 + \ldots + Y_n}{n},$$

$$\bar{Y} = \frac{12773,5 + 12965,5 + 13304,6 + 6452,3 + 21268,5}{5} = \frac{76764,5}{5} = 15352,9 \text{milj.EUR.}$$

Ja starp **momentu** dinamikas rindas līmeņiem ir **vienāda ilguma** laika periodi, vidējo līmeni aprēķina pēc hronoloģiskā vidējā formulas:

$$\bar{Y} = \frac{0,5Y_1 + Y_2 + Y_3 + \ldots + 0,5Y_n}{n - 1},$$

kur n – momentu skaits.

Piemērs.

Latvijas vispārējais valdības parāds gada beigās, milj. EUR:

2022. g. – 10 783,9
2021. g. – 11 209,1;
2020. g. – 12 710,6;
2019. g. – 14 688,4
2018. g. – 15 947,4.

Gada vidējais parāda apjoms ir:

$$\bar{Y} = \frac{0,5 \cdot 10783,9 + 11209,1 + 1270,6 + 14688,4 + 0,5 \cdot 15974,3}{5 - 1} = 12993,4 \text{ milj. EUR.}$$

Ja starp **momentu** dinamikas rindas līmeņiem ir **dažāda ilguma** laika periodi, vidējo līmeni var aprēķināt pēc formulas:

$$\bar{Y} = \frac{(y_1 + y_2)l_1 + (y_2 + y_3)l_2 + (y_{n-1} + y_n)l_{n-1}}{2(l_1 + l_2 + \ldots + l_{n-1})},$$

kur y – dinamikas rindas līmeņi;
l – laika periodi.

Vidējais absolūtais pieaugums (samazinājums) izsaka, par kādu absolūto lielumu vidēji katrā laika vienībā attiecīgajā periodā pieaugusi vai samazinājusies pētāmā parādība. To aprēķina, dalot ķēdes absolūto pieaugumu summu ar absolūto pieaugumu skaitu:

$$\bar{\Delta}_{(\text{ķ})} = \frac{\sum_{m=1}^{n} \Delta_{m(\text{ķ})}}{n_{\Delta}},$$

kur n_{Δ} – absolūto pieaugumu skaits.

Izmantojot iepriekš dotā piemēra datus par Latvijas eksportu, aprēķina gada vidējo eksporta pieaugumu:

$$\bar{\Delta}_{(\text{ķ})} = \frac{8495{,}2}{4} = 2123{,}8 \text{ milj. EUR.}$$

Ja nav tiešu datu par ķēdes absolūtajiem pieaugumiem, bet ir zināmi rindas sākuma un beigu līmeņi, tad vidējo absolūto pieaugumu aprēķina pēc formulas:

$$\bar{\Delta}_{(\text{b})} = \frac{Y_n - Y_1}{n-1},$$

kur n – rindas līmeņu skaits.

$$\bar{\Delta}_{(\text{b})} = \frac{21268{,}5 - 12773{,}3}{5-1} = 2123{,}8 \text{ milj. EUR}$$

Tātad ik gadu eksporta apjoms vidēji ir palielinājies par 2123,8 milj. EUR.

Vidējais augšanas temps ir dinamikas rindas līmeņu maiņas intensitātes raksturotājs. Tas raksturo pētāmās parādības attīstības vidējo intensitāti, parādot, cik reizes vidēji laika vienībā mainījušies dinamikas rindas līmeņi. Vidējo augšanas tempu var izteikt koeficientos vai procentos.

Attīstības intensitāte ir parādības tālākas paplašināšanās vai sašaurināšanās process, kas saistīts ar katrā iepriekšējā periodā jau sasniegtā līmeņa radītajām iespējām.

Vidējais augšanas temps jāaprēķina arī tāpēc, ka augšanas tempi pa gadiem svārstās. Vidējo augšanas tempu plaši lieto statistiskajos aprēķinos.

Ķēdes vidējo augšanas tempu aprēķina pēc ģeometriskā vidējā lieluma formulas:

$$\bar{T}_{(\text{ķ})} = \sqrt[n]{T_{1(\text{ķ})} T_{2(\text{ķ})} \ldots T_{n(\text{ķ})}} = \sqrt[n]{\prod_{m=1}^{n} T_{m(\text{ķ})}},$$

kur n – ķēdes augšanas tempu skaits;

T – individuālie ķēdes augšanas tempi, izteikti koeficientos.

$$\bar{T}_{(\text{ķ})} = \sqrt[4]{1{,}056 \cdot 1{,}026 \cdot 1{,}236 \cdot 1{,}292} = 1{,}124 = 112{,}4\ \%$$

Ja nav informācijas par katru ķēdes augšanas tempu, vidējo augšanas tempu aprēķina pēc formulas:

$$\bar{T}_{(\text{b})} = \sqrt[n-1]{\frac{Y_n}{Y_1}};$$

$$\overline{T}_{(b)} = \sqrt[5-1]{\frac{21268,5}{12773,3}} = 1,135 = 113,5\,\%.$$

Vidējais pieauguma temps papildina vidējo augšanas tempu. Tas rāda, par cik procentiem vidēji palielinājies (ja vidējais pieauguma temps ir ar plus zīmi) vai samazinājies (ja pieaugumam ir mīnus zīme) pētāmās parādības līmenis visā aplūkojamā periodā. Vidējo pieauguma tempu aprēķina, no vidējā augšanas tempa atņemot 100 %, ja tas izteikts procentos, vai 1, ja tas izteikts koeficientos:

$$\overline{t} = \overline{T} - 100,0\,\%; \overline{t} = \overline{T} - 1;$$

$$\overline{t} = 112,4\,\% - 100,0\,\% = 12,4\,\%; \overline{t} = 1,135 - 1,0 = 0,135.$$

8.4. Dinamikas rindas pamattendences jeb trenda atklāšana

Svarīgs sociālekonomisko procesu likumsakarību pētīšanas virziens ir dinamikas rindas kopējās attīstības tendences – **trenda** – noteikšana. Trenda virziens un raksturs dažreiz ir konstatējami bez dinamikas rindas speciālas pārveidošanas. To skaidri atspoguļo dinamikas rindas līmeņi, kuri parāda attīstību vienā noteiktā virzienā – palielināšanās vai samazināšanās, progress vai regress.

Bieži ir sastopamas tādas dinamikas rindas, kuru līmeņi svārstās – gan palielinās, gan samazinās. Šādos gadījumos, lai noteiktu trendu, lieto īpašas dinamikas rindu izlīdzināšanas metodes.

Trenda izzināšana nepieciešama ne tikai tādēļ, lai pilnīgāk noskaidrotu pētāmās parādības attīstības raksturu, kāds faktiski bijis jau aizritējušā periodā, bet galvenokārt tādēļ, lai iegūtu teorētiski pamatotu bāzi dinamikas rindas turpināšanai (t. i., parādības prognozēšanai).

Trendu grūtāk ir atklāt, ja dinamikas rindas līmeņi attiecas uz ļoti īsiem laika periodiem. Turklāt jāatzīmē, ka sabiedrisko parādību attīstības procesu nosaka sistemātisko faktoru komplekss, kas pastāv ilgstošu laiku un ietekmē parādību regresa vai progresa (palielināšanās vai samazināšanās) virzienā. Vienlaikus dinamikas rindas līmeņus ietekmē arī nejauši, individuāli faktori, kas darbojas īslaicīgi dažādos virzienos un rada dinamikas rindas svārstības. Rezultātā nepieciešama dinamikas rindas matemātiska pārveidošana.

Trenda noteikšanai lieto speciālas metodes. Konkrētas metodes izmantošana ir atkarīga no sākotnējās informācijas un analīžu uzdevumiem. Visplašāk lieto intervālu paplašināšanas, slīdošo vidējo un analītiskās izlīdzināšanas metodi.

Intervālu paplašināšanas metode saistīta ar sākotnējās dinamikas rindas pārveidošanu ilgstošāku periodu rindās (piemēram, dienas – mēneša, mēneša – ceturkšņa, ceturkšņa – gada utt.). Viens no šīs metodes trūkumiem – grūti pamatot intervālu paplašināšanas robežas. Dziļākas analīzes vajadzībām šī metode ir pārāk elementāra. To var lietot tad, ja rinda, kuru pārveido, ir pietiekami gara.

Slīdošo vidējo metode. Arī šīs metodes pamatā ir intervālu paplašināšanas princips, taču tā nav kalendāriska intervālu paplašināšana. Veidojot katru jaunu paplašinātu intervālu, tā sākuma punkts "paslīd" par vienu laika vienību uz priekšu. Šī metode sevišķi piemērota tajos gadījumos, kad parādības attīstībai ir nevienmērīgs, zigzagveida raksturs (kāpumi un kritumi).

Katrai dinamikas rindai slīdošo vidējo aprēķina šādā secībā:

- nosaka izlīdzināšanas intervālu, t. i., intervālā ietilpstošo līmeņu skaitu. Turklāt ievēro šādus noteikumus: ja jāizlīdzina mazas, haotiskas svārstības, tad izlīdzināšanas intervālus ņem pēc iespējas lielākus, un otrādi – izlīdzināšanas intervālus ņem mazākus, ja jāatbrīvojas no svārstībām, kuras periodiski atkārtojas;
- aprēķina izlīdzināšanas intervālu vidējo līmeņu nozīmes, kuras vienlaicīgi ir dinamikas rindas līmeņu izlīdzinošās nozīmes.

Slīdošo vidējo aprēķināšana ir atkarīga no tā, vai aprēķina:

- nepāra skaita locekļu slīdošos vidējos, piemēram, trīs locekļu, piecu locekļu utt.;
- pāra skaita locekļu slīdošos vidējos, piemēram, četru līmeņu utt.

Lai aprēķinātu **nepāra skaita**, piemēram, trīs locekļu, slīdošos vidējos, vispirms jāaprēķina attiecīgā plašuma slīdošajos intervālos ietverto līmeņu summas, kuras pēc tam jādala ar locekļu (līmeņu) skaitu intervālā.

Iegūtos rezultātus – slīdošos vidējos līmeņus – attiecina pret intervālu vidū esošajiem locekļiem. Piemēram, trīs locekļu slīdošos vidējos attiecina pret katra slīdošā intervāla otrajiem locekļiem. Rindas pirmajam un pēdējam empīriskajam līmenim trīs locekļu slīdošos vidējos nevar aprēķināt.

Aprēķinot **pāra skaita** slīdošos vidējos, vispirms iegūst attiecīgā plašuma slīdošo intervālu summas, kuras pēc tam dala ar locekļu skaitu intervālā. Šādi iegūtos pāra skaita slīdošos vidējos sauc par necentrētiem slīdošiem vidējiem, un tos sākotnēji neattiecina pret kādu konkrētu rindas locekli, bet ievieto starp tiem (starp periodiem).

Piemēram, ja ir zināmi mēneša rādītāji, tad četru locekļu slīdošos vidējos līmeņus rēķina pēc formulām:

$$\bar{Y}_1 = \frac{Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_n}{4}, \quad \bar{Y}_2 = \frac{Y_2 + Y_2 + Y_3 + Y_n}{4} \text{ utt.}$$

Četru locekļu **centrēto slīdošo vidējo** aprēķina kā divu locekļu slīdošos vidējos no diviem blakus esošiem necentrētiem vidējiem:

$$\tilde{Y}_{1(c)} = \frac{\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2}{2}, \quad \tilde{Y}_{2(c)} = \frac{\bar{Y}_2 + \bar{Y}_3}{2} \text{ utt.}$$

Četru locekļu slīdošos vidējos nevar aprēķināt četriem empīriskās rindas locekļiem – diviem rindas sākumā un diviem rindas beigās. Tāpēc, lai iegūtu slīdošos vidējos līmeņus par katru gada mēnesi, ar gada sākotnējo informāciju nepietiek – nepieciešama informācija par plašāku periodu.

Slīdošo vidējo dinamikas rinda parādības pārmaiņu pamattendenci parāda labāk nekā sākotnējo līmeņu rinda, jo tiek izslēgtas atsevišķu sākotnējo līmeņu gadījuma rakstura svārstības.

Četru locekļu slīdošo vidējo aprēķināšana parādīta piemērā par importa apjomiem.

Piemērs.

Latvijas imports 2022. gadā, milj. EUR

Mēnesis	Importa apjoms	Četru locekļu		
		slīdošo intervālu summas	slīdošais vidējais imports	
			necentrētais	centrētais
A	1	2	3	4
Janvāris	1613,2			
Februāris	1793,2	7874,9	1968,7	
Marts	2284,0	8632,8	2158,2	2063,4
Aprīlis	2184,5	8865,5	2216,4	2187,3
Maijs	2371,1	8808,3	2202,1	2209,2
Jūnijs	2025,9	9121,5	2280,4	2241,2
Jūlijs	2226,8	9242,9	2310,7	2295,6
Augusts	2497,7	9615,2	2403,8	2357,2
Septembris	2492,5	9637,4	2409,4	2406,6
Oktobris	2398,2	9495,1	2373,8	2391,6
Novembris	2249,0			
Decembris	2355,4			

Analītiskā izlīdzināšanas metode. Uzskata, ka šī ir visefektīvākā trenda atklāšanas metode. Tā ne tikai atklāj trendu, bet arī palīdz analizēt dinamikas rindu savstarpējo sakarību (korelāciju).

Dinamikas rindas analītiskā izlīdzināšana nozīmē dinamikas rindas teorētisko līmeņu aprēķināšanu, t. i., faktiskie dinamikas rindas līmeņi (Y_i) tiek aizstāti ar teorētiskajiem līmeņiem ($\tilde{Y}_t$). Ja faktiskos dinamikas rindas līmeņus attēlotu grafiski, tad iegūtu lauztu līniju, kas atspoguļo gan galveno tendenci, gan arī dažādas novirzes, kas radušās vai nu sezonas svārstību, vai citu faktoru rezultātā. Lai noskaidrotu galveno – pamattendenci –, šī lauztā līnija jāiztaisno. Iztaisnošanu var veikt gan pēc taisnes, gan pēc kādas citas līnijas, kas atspoguļo dinamikas rindas līmeņu funkcionālo atkarību no laika. Atsevišķas funkcijas izvēle ir grūts uzdevums, kura pamatā ir parādības būtības teorētiskā analīze un attīstības parādību likumi.

Atkarībā no parādības attīstības tipa lieto noteiktu matemātiskās funkcijas veidu.

Ja pētāmai parādībai ir vienmērīgs attīstības raksturs, t. i., ja dinamikas rindā ir apmēram vienāda lieluma ķēdes absolūtie pieaugumi, tad visatbilstošākā šādas rindas analītiskā forma ir lineārs vienādojums:

$$\tilde{Y}_t = a_0 + a_1 t,$$

kur $\tilde{Y}_t$ – izlīdzinātās rindas līmeņi, kas jāaprēķina;

a_0, a_1 – taisnes parametri;

t – laika rādītāji (dienas, mēneši utt.).

Ja parādībai ir pakāpeniski paātrināts, augošs raksturs, tad izlīdzināšanu var izdarīt atbilstoši parabolas vienādojumiem. Parasti izmanto otrās kārtas parabolu:

$$\tilde{Y}_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2.$$

Ja parādības attīstība izpaužas kā līmeņu pakāpeniska pazemināšanās, izlīdzināšanai visstabilākā ir hiperbola. Tās vienādojums ir šāds:

$$\tilde{Y}_t = a_0 + \frac{a_1}{t}.$$

Iespējami arī citi analītiskās izlīdzināšanas veidi, piemēram, atbilstoši logaritmiskajam vienādojumam:

$$\tilde{Y}_t = a_0 + a_1 \lg t.$$

Parametru (a_0 un a_1) skaitliskās nozīmes katrā atsevišķā gadījumā nosaka, pamatojoties uz dinamikas rindas konkrētiem skaitļiem. Tomēr jāatzīmē, ka to aprēķināšanai visbiežāk lieto **vismazāko kvadrātu metodi**. Tā nodrošina divu svarīgu un obligātu noteikumu ievērošanu. Pirmkārt, analītiski aprēķināto līmeņu summa ir vienāda ar empīriskās rindas līmeņu summu:

$$\sum \tilde{Y}_t = \sum Y_i \quad \text{jeb} \quad \sum \left(Y_i - \tilde{Y}_t\right) = 0.$$

Otrkārt, analītiski aprēķināto līmeņu un empīrisko līmeņu starpību kvadrātu summa $\sum \left(Y_i - \tilde{Y}_t\right)^2$ ir vismazākā.

Noviržu kvadrātu summai (starpībai starp faktiskajiem un teorētiskajiem līmeņiem) jābūt minimālai.

Lai aprēķinātu izlīdzināšanai izraudzītās analītiskā vienādojuma konstantes a_0 un a_1, jāsastāda un jāatrisina normālvienādojuma sistēma:

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum t = \sum Y \\ a_0 \sum t + a_1 \sum t^2 = \sum tY \end{cases}$$

kur n – rindas locekļu skaits;

t – laika periodi;

Y – dinamikas rindas sākotnējie līmeņi.

Sistēmu var vienkāršot, pārnesot laika atskaites sākumu uz rindas vidu. Ja rindā ir nepāra skaits līmeņu, tad centrālajam līmenim piešķir "numuru" 0, pirms tā esošajiem līmeņiem piešķir "numurus" (–)1, (–)2 utt., bet sekojošajiem līmeņiem – "numurus" 1, 2 utt.

Šajā gadījumā $\sum t = 0$, un normālvienādojuma sistēma būs šāda:

$$\begin{cases} na_0 = \sum Y \\ a_1 \sum t^2 = \sum Yt \end{cases}$$

no kā izriet:

$$a_0 = \frac{\sum Y_i}{n}, \quad a_1 = \frac{\sum Y_i t}{\sum t^2}.$$

Aprēķinot a_0 un a_1 parametrus, viegli noteikt teorētiskos līmeņus, t. i., punktu ordinātas meklējamai taisnei $\tilde{y}t$.

Aplūkosim analītisko izlīdzināšanu pa taisni, izmantojot nosacītus datus par produkcijas realizāciju N uzņēmumā.

Piemērs.

Produkcijas realizācija N uzņēmumā, tūkst. EUR

Gadi	Realizētā produkcija (Y_i)	t	t^2	$Y_i t$	$\tilde{Y}_1 = a_0 + a_1 t$
2011	77,0	–2	4	–154,0	85,94
2012	90,2	–1	1	–90,2	91,20
2013	112,0	0	0	0	96,46
2014	109,4	1	1	109,4	101,72
2015	93,7	2	4	187,4	106,98
Kopā	482,3		10	52,6	482,3

Aprēķinu pareizību pārbauda pēc formulas:

$$\sum Y_i = \sum \tilde{Y}t.$$

Ja dinamikas rindas līmeņu skaits ir pāra skaitlis, tad, lai panāktu, ka $\sum t = 0$, ir divas reizes jāpaplašina (jādivkāršo) līmeņu laika secības mērogs un koeficientu t nozīmes jāsāk ar $1 - n$.

8.5. Sezonalitātes analīze

Par **sezonālajām svārstībām** sauc tās dinamikas rindas līmeņu svārstības kalendārā gada ietvaros, kuras ar lielāku vai mazāku regularitāti atkārtojas ik gadu. Sezonālās svārstības ir raksturīgas gandrīz visās dzīves sfērās: lauksaimnieciskajā ražošanā, zvejniecībā, elektroenerģijas izlietojumā (ziemā vienmēr lielāks nekā vasarā), dažādu preču pieprasījumā, demogrāfiskajos procesos (laulību noslēgšana, iedzīvotāju pārvietošanās) u. c.

Sezonālās svārstības ir objektīva sabiedrisko parādību izpausmes forma. Lielākajā daļā gadījumu to rada dabas faktori, dažādu gadalaiku apstākļi, kā arī parādības, kuru sezonalitātes pamatā ir sociālekonomiskie faktori, piemēram, iepirkšanās pirms Ziemassvētkiem, Jaunā gada, Lieldienām, paaugstināts mācību līdzekļu pieprasījums augusta beigās, tūristu pieplūdums vasaras mēnešos u. c.

Sezonālās svārstības parasti negatīvi ietekmē ražošanu, transporta kustību, tirdzniecību un citas cilvēku darbības sfēras, jo dažos laika periodos rodas pārslodze, citos – jaudu nepietiekama izmantošana.

Lai pētītu sezonālās svārstības, ir jābūt statistiskajiem datiem (dinamikas rindas līmeņiem) par katru mēnesi vairāku gadu garumā. Dažos gadījumos var būt vajadzīgi dati pa nedēļām vai pat pa dienām.

Sezonālo svārstību mērīšanai lieto dažādas metodes:
- absolūto starpību metodi,
- relatīvo starpību metodi,
- sezonalitātes indeksus.

Absolūto starpību metodi lieto, lai aprēķinātu absolūto novirzi no vidējā līmeņa. **Absolūtā novirze** ir starpība starp dinamikas rindas atsevišķiem līmeņiem Y_m un vidējo līmeni $\bar{Y}$:

$$\Delta_Y = Y_m - \bar{Y}.$$

Relatīvo starpību metodi lieto, lai aprēķinātu relatīvo novirzi no izlīdzinātā līmeņa. **Relatīvā novirze** ir attiecība starp absolūto novirzi un izlīdzināto līmeni.

Sezonalitātes indekss raksturo dinamikas rindu līmeņu svārstības kādā slēgtā laika periodā (piemēram, mēnesī, ceturksnī, gadā). Tā aprēķināšanas pamatā ir faktisko līmeņu attiecināšana pret attiecīgā perioda vidējo (tipisko) līmeni vai matemātiski pārveidotiem līmeņiem, kas izsaka attīstības pamattendenci.

Praksē lieto galvenokārt šādus **sezonalitātes indeksu aprēķināšanas paņēmienus**:
- aritmētiskā vidējā paņēmienu,
- slīdošo vidējo paņēmienu,
- analītiskās izlīdzināšanas paņēmienu.

Aritmētiskā vidējā paņēmiens ir viens no vienkāršākajiem sezonalitātes indeksu aprēķināšanas paņēmieniem. Ja, piemēram, pēta gada atsevišķo periodu sezonālās svārstības, tad **sezonalitātes individuālos indeksus i_s** aprēķina pēc formulas:

$$i_s = \frac{Y_m}{\bar{Y}} 100,$$

kur Y_m – gada m laika vienības (mēneša, ceturkšņa) faktiskais līmenis;
$\bar{Y}$ – laika vienības (mēneša, ceturkšņa) vidējais līmenis gadā.

Vidējo līmeni aprēķina pēc nesvērtā aritmētiskā vidējā formulas:

$$\bar{Y} = \frac{\sum_{m=1}^{n} Y_m}{n},$$

kur n – m laika vienību (mēnešu, ceturkšņu) skaits gadā.

Lai mazinātu dažādu nejaušu apstākļu ietekmi, sezonalitātes indeksus parasti aprēķina nevis pēc viena gada datiem, bet gan pēc vairāku gadu vidējiem rādītājiem kā atsevišķu mēnešu vai ceturkšņu vidējos sezonalitātes indeksus $\bar{i}_s$:

$$\bar{i}_s = \frac{\bar{Y}_m}{\bar{\bar{Y}}} 100,$$

kur $\bar{Y}_m$ – pēc vairāku gadu datiem aprēķināts atsevišķa mēneša vai atsevišķa ceturkšņa vidējais līmenis;
$\bar{\bar{Y}}$ – pēc vairāku gadu datiem aprēķināts attiecīgās laika vienības vidējais līmenis visā daudzu gadu periodā.

Abus vidējos līmeņus aprēķina pēc nesvērtā aritmētiskā vidējā formulas:

$$\bar{Y} = \frac{\sum_{m=1}^{k} Y_{m_i}}{k}, \quad \bar{\bar{Y}} = \frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{m=1}^{n} Y_{m_i}}{nk},$$

kur k – gadu skaits,
n – gada m laika vienību skaits.

Jāatzīmē, ka aritmētiskā vidējā paņēmienu sezonalitātes indeksa mērīšanā pamatoti var lietot tikai tad, ja laika gaitā netiek konstatēta kaut cik ievērojama pētāmās parādības attīstība. Ja pētāmajai parādībai ir izteikti augošs vai dilstošs attīstības virziens, tad sezonalitātes indeksa aprēķinos jāietver attiecīgi koriģējumi attīstības pamattendences ietekmes novēršanai. Lineāras attīstības pamattendences gadījumā to iespējams panākt, aprēķinot sezonalitātes indeksu pēc slīdošo vidējo paņēmiena.

Slīdošo vidējo paņēmiens sezonalizātes indeksa aprēķināšanā ir analogs aritmētiskā vidējā paņēmienam. Šajā gadījumā katrai laika vienībai (mēnesim vai ceturksnim) atbilstošo pētāmās parādības faktisko līmeni dala ar līmeni, kas šai pašai laika vienībai aprēķināts pēc slīdošo vidējo metodes. Pēc slīdošo vidējo paņēmiena sezonalitātes indeksu var aprēķināt tikai kā **vairāku gadu vidējo indeksu**, jo pēc viena gada datiem nav iespējams iegūt katram mēnesim vai ceturksnim atbilstošu slīdošo vidējo līmeni:

$$\bar{i}_s = \frac{\bar{Y}_m}{\bar{\bar{Y}}_m}100, \quad \bar{\bar{Y}}_m = \frac{\sum_{m_i=1}^{k} \bar{Y}_{m_i}}{k},$$

kur $\bar{Y}_m$ – m laika vienības faktisko līmeņu aritmētiskais vidējais;

$\bar{\bar{Y}}_m$ – šīs pašas laika vienības slīdošo vidējo līmeņu aritmētiskais vidējais.

Aprēķinot slīdošos vidējos līmeņus, jāņem tik plašs to periods, cik garš ir attiecīgais sezonalitātes cikls. Ja, piemēram, gada ietvaros pēta atsevišķu mēnešu sezonalitāti, tad jāaprēķina 12 locekļu (12 mēnešu) slīdošie vidējie, bet, pētot ceturkšņu sezonalitāti, jāaprēķina četru locekļu slīdošie vidējie.

Sezonālo svārstību uztveršanai un analīzei visvairāk piemērots ir **analītiskais izlīdzināšanas paņēmiens**, it sevišķi tad, ja pētāmajai parādībai ir progresējoša (paātrināta) attīstības pamattendence. Vispārīgā veidā sezonalitātes individuālo indeksu aprēķina pēc formulas:

$$i_s = \frac{Y_m}{\bar{Y}_{t(m)}}100,$$

kur $\bar{Y}_{t(m)}$ – analītiski izlīdzinātais attiecīgā perioda (piemēram, mēneša, ceturkšņa) līmenis.

Visbiežāk faktisko līmeņu analītiskā izlīdzināšana notiek atbilstoši taisnes vienādojumam, otrās kārtas parabolas vienādojumam vai eksponentvienādojumam. Lietojot vairāku gadu datus, ar analītiskās izlīdzināšanas paņēmienu var aprēķināt arī vidējos sezonalitātes indeksus:

$$\bar{i}_s = \frac{\bar{Y}_m}{\bar{\bar{Y}}_{t(m)}}100, \quad \text{kur } \bar{\bar{Y}}_{t(m)} = \frac{\sum_{m=1}^{k} \bar{Y}_{t(m_i)}}{k}.$$

Sezonalitātes indeksa aprēķina gaita, izmantojot analītiskās izlīdzināšanas paņēmienu, ir šāda:

- katram mēnesim (ceturksnim) aprēķina izlīdzinātos līmeņus $\bar{Y}_{t(m)}$;
- aprēķina mēnešu (ceturkšņu) sezonalitātes indeksus, dalot dinamikas rindas faktisko līmeni Y_m ar izlīdzināto līmeni $\bar{Y}_{t(m)}$;
- vienāda nosaukuma periodiem, piemēram, pirmajam ceturksnim aprēķina aritmētisko vidējo sezonalitātes indeksu: $\bar{i} = (i_1 + i_2 + \ldots + i_n)/n$, kur n – vienāda nosaukuma periodu skaits.

Piemērs.

Dzimušo skaits Latvijā, cilvēki

Ceturksnis	2020. gadā	2021. gadā	2022. gadā	Kopā 2020.–2022. gadā	Ceturkšņa vidējais līmenis	Absolūtā novirze no ceturkšņa vidējā līmeņa	Relatīvā novirze no ceturkšņa vidējā līmeņa, %	Vidējais sezonalitātes indekss, %
					$\bar{Y}_m$	$\bar{Y}_m - \bar{\bar{Y}}$	$\frac{\bar{Y}_m - \bar{\bar{Y}}}{\bar{Y}} 100$	$\bar{i}_s = \frac{\bar{Y}_m}{\bar{\bar{Y}}} 100$
I	4323	4124	4070	12 517	4172	–72	–1,7	98,3
II	4634	4394	4216	13 244	4415	171	4,0	104,0
III	4589	4801	4277	13 667	4556	312	7,3	107,3
IV	4006	4101	3391	11 498	3833	–411	–9,7	90,3
Kopā	17 552	17 420	15 954	50 926				
Ceturkšņa vidējais līmenis $\bar{Y}$	4388	4355	3988	–	4244			

Laika posmā no 2020. gada līdz 2022. gadam ceturkšņa vidējo līmeni aprēķina:

$$\bar{Y} = \frac{50926}{4 \cdot 3} = 4244 \text{ dzimušie.}$$

Sezonalitātes indeksi izsaka pētāmās parādības sezonalitāti diferencēti; tie parāda tās sezonalitāti saistībā ar gada konkrētu mēnesi vai ceturksni. Sezonalitātes vispārinošs raksturotājs ir **sezonalitātes indeksu vidējā kvadrātiskā novirze** no 100 %, kuru lieto slēgta cikla sezonalitātes dziļuma mērīšanai. Sezonalitātes indeksa vidējo kvadrātisko novirzi aprēķina pēc formulas:

$$\sigma_s = \frac{\sqrt{\sum (i_s - 100)^2}}{n},$$

kur i_s – mēneša, ceturkšņa sezonalitātes indekss.

Ja ir zināmi divu gadu (pārskata gada un bāzes gada) sezonalitātes dziļuma rādītāji $\delta_{s(1)}$ un $\delta_{s(0)}$, tad to attiecību sauc par **sezonalitātes pārmaiņu koeficientu**. Ja šis koeficients ir lielāks par 1,0, tad notikusi sezonalitātes padziļināšanās; ja mazāks par 1,0, tad notikusi sezonalitātes izlīdzināšanās.

Sezonalitātes raksturošanai plaši izmanto arī grafisko metodi. Tā dod uzskatāmu priekšstatu par sezonālo svārstību plašumu un raksturu. Visplašāk izmanto **radiogrammas** un **līkņu diagrammas**.

8.6. Dinamikas rindas interpolācija, ekstrapolācija un prognozēšana

Dinamikas rindu analītiskās izlīdzināšanas uzdevums nav vienīgi atklāt attīstības pamattendenci. Viens no trenda praktiskās lietošanas gadījumiem ir dinamikas rindas līmeņu interpolācija un ekstrapolācija.

Dinamikas rindu analīzē ar **interpolāciju** saprot nezināmo rindas līmeņu aprēķināšanu vai apšaubāmo līmeņu pārrēķināšanu, ja zināmi pirms un pēc šiem līmeņiem esošie līmeņi.

Ar **ekstrapolāciju** saprot pētāmās parādības prognozēšanu, dinamikas rindas turpināšanu un tās tālāko līmeņu aprēķināšanu, ja zināmi rindas iepriekšējie līmeņi.

Gan interpolācijas, gan arī ekstrapolācijas pamatā ir lielumi, kuri izsaka pētāmās parādības attīstības pamattdendenci, un pieņēmums, ka nezināmie interpolējamie vai ekstrapolējamie līmeņi ir būtiski saistīti ar zināmajiem dinamikas rindas līmeņiem un ir pakļauti rindas trendam.

Dinamikas rindu **ekstrapolējot**, jāuzskata, ka parādības attīstība arī tālāk notiks saskaņā ar **esošās rindas ietvaros konstatēto trendu**. Ekstrapolāciju praktiski izdara, turpinot (pagarinot) ekstrapolējamās rindas un laika secības koeficienta t aili un šī koeficienta jaunās skaitliskās nozīmes attiecīgi ievietojot trenda vienādojumā, kura konstantes aprēķinātas, izmantojot empīriskās rindas zināmos līmeņus.

Jāatzīmē, ka ekstrapolācijai ir pakļauti tikai tie procesi, kas reāli turpinās un attīstās. Nav pamata ekstrapolēt parādības, kuras jau nostabilizējušās un kuru attīstība ir izbeigusies (piemēram, privatizācija).

Ekstrapolācijas lietošana prognozēšanā saistīta ar vairāku noteikumu ievērošanu:

- trenda bāzei un ekstrapolācijas periodam jābūt kvalitatīvi viendabīgiem. Ir jābūt pārliecībai par to, ka ekstrapolācijas periodā objektīvi saglabājas tie paši sociālekonomiskie likumi un tās pašas svarīgākās, ar ekstrapolējamo parādību saistītās statistikas likumsakarības un tendences, kādas pastāvēja trendam par bāzi ņemtajā periodā. Tāpēc ekstrapolēšanas periods parasti nav pārāk garš;
- ekstrapolēšanai sekmīgi var izmantot tikai stabilas parādības, kuras nav pakļautas krasām nejaušībām. Ekstrapolācijai izmantojamam trendam par bāzi var ņemt tikai tādu laika periodu, kura ietvaros nav notikušas lielas izņēmumstāvokļa radītas novirzes, kas būtiski ietekmē trenda vienādojuma parametrus;
- ekstrapolācijas rezultātu ticamība lielā mērā ir atkarīga arī no pareizas tā perioda izvēles, par kuru aprēķina ekstrapolēšanai izmantojamo trendu.

Ekstrapolācija jāaplūko kā prognozēšanas sākuma stadija. Ekstrapolācijas mehāniska izmantošana var kļūt par neprecizitātes un nepareizu secinājumu cēloni. Vienmēr jāņem vērā visi nosacījumi, priekšnoteikumi un hipotēzes.

Ekstrapolāciju vispārīgā veidā var izteikt ar formulu:

$$\tilde{Y}_{m+T} = f\left(Y_m, T, a\right),$$

kur $\tilde{Y}_{m+T}$ – prognozējamais līmenis;
Y_m – prognozējamais līmenis;
T – ekstrapolācijas periods;
a – trenda vienādojuma parametrs.

Atkarībā no prognozes principiem un sākotnējiem datiem izšķir šādas vienkāršākās esktrapolācijas metodes:

- vidējā absolūtā pieauguma metode,
- vidējā augšanas tempa metode,
- trenda analītiskās izlīdzināšanas metode.

Vidējo absolūto pieaugumu prognozēšanā var izmantot, ja pamattendence ir lineāra, t. i., ja metodes pamatā ir pieņēmums, ka dinamikas rindas līmeņi mainās vienmērīgi (absolūtie pieaugumi ir nemainīgi, stabili).

Lai veiktu prognozēšanu, vispirms jāaprēķina vidējais absolūtais pieaugums un tas jāpieskaita pie pēdējā rindas līmeņa tik reižu, par cik periodiem ekstrapolē rindu.

Ekstrapolāciju veic pēc formulas:

$$\tilde{Y}_{m+t} = Y_m + \bar{\Delta} t,$$

kur $\tilde{Y}_{m+t}$ – ekstrapolējamais līmenis;
$m+t$ – šī līmeņa (gada) numurs;
Y_m – dinamikas rindas pēdējais līmenis;
t – prognozes laiks;
$\bar{\Delta}$ – vidējais absolūtais pieaugums.

Vidējo augšanas tempu prognozēšanā var izmantot, ja ir pamats uzskatīt, ka rindas pamattendenci raksturo eksponentfunkcijas līkne. Lai aprēķinātu tendenci, jānosaka vidējais augšanas koeficients, kuru kāpina ekstrapolācijas periodam atbilstošā pakāpē. Ekstrapolāciju veic pēc formulas:

$$\tilde{Y}_{m+t} = Y_m \bar{T}^t,$$

kur Y_m – dinamikas rindas pēdējais līmenis;
t – prognozes laiks;
$\bar{T}$ – vidējais augšanas koeficients.

Trenda analītiskā izlīdzināšana ir visplašāk izplatītā prognozēšanas metode. Izmantojot šo metodi, tiek pieņemts, ka parādības līmeņa lielumu ietekmē daudzi faktori, bet nav iespējams noteikt katra faktora ietekmi. Līdz ar to parādības attīstību saista nevis ar vienu konkrētu faktoru, bet ar laiku, t. i., $Y = f(t)$. Ekstrapolācija rada iespēju iegūt prognozes punktu nozīmes.

Jāatzīmē, ka jebkurai statistiskai prognozei ir tuvināts raksturs, tāpēc ir mērķtiecīgi noteikt prognozes ticamības intervālu.

Pārbaudes jautājumi

1. Kas ir dinamikas rindas, kā tās veido un kad izmanto?
2. Raksturojiet absolūto, relatīvo un vidējo līmeņu dinamikas rindas!
3. Kādi ir dinamikas rindas līmeņu absolūto un relatīvo pārmaiņu galvenie raksturojošie rādītāji, un kā tos aprēķina?
4. Paskaidrot, kas ir pieauguma koeficients un kas ir augšanas temps!
5. Kāda ir atšķirība starp augšanas tempu un pieauguma tempu?
6. Kā aprēķina dinamikas rindas vidējos lielumus, vidējo augšanas tempu un vidējo pieauguma tempu?
7. Kas ir "trends", un kādas metodes tā noteikšanai izmanto?
8. Ko nozīmē dinamikas rindas interpolācija un ekstrapolācija?

Uzdevumi dinamikas rindas rādītāju aprēķināšanai

1. uzdevums. Doti dati par nodarbināto mēneša vidējo bruto darba samaksu Latvijā (datu avots: *www.csp.gov.lv*).

Gadi	Mēneša vidējā darba samaksa, EUR
2015	818
2016	859
2017	926
2018	1004
2019	1076
2020	1143
2021	1277
2022	1373

Aprēķināt un izdarīt secinājumus:

1) 2016., 2017. utt. gadā salīdzinājumā ar iepriekšējo gadu mēneša vidējās darba samaksas:
   a) augšanas tempu procentos,
   b) pieauguma tempu procentos,
   c) absolūto pieaugumu;
2) 2016., 2017. utt. gadā līdz 2022. gadam salīdzinājumā ar bāzes gadu – 2015. gadu – mēneša vidējās darba samaksas:
   a) augšanas tempu procentos,
   b) pieauguma tempu procentos,

c) absolūto pieaugumu;

3) ķēdes un bāzes absolūto pieaugumu matemātiskās sakarības;

4) ķēdes un bāzes augšanas tempu matemātiskās sakarības;

5) laika posmā no 2015. gada līdz 2022. gadam mēneša vidējās darba samaksas:
   a) vidējo līmeni mēnesī,
   b) vidējo absolūto pieaugumu (pēc divām metodēm),
   c) vidējo augšanas tempu procentos (pēc divām metodēm),
   d) vidējo pieauguma tempu procentos;

6) pieauguma 1 procenta absolūto nozīmi (kopā pa visu periodu), EUR.

2. uzdevums. N uzņēmumā nodarbināto skaits (nosacīti dati).

Gadi	Cilvēki
2010	102
2011	143
2012	173
2013	247
2014	328
2015	333

Aprēķināt:

1) salīdzinājumā ar iepriekšējo gadu:
   a) absolūto pieaugumu,
   b) augšanas tempu procentos,
   c) pieauguma tempu procentos;

2) salīdzinājumā ar 2010. gadu:
   a) absolūto pieaugumu,
   b) augšanas tempu procentos,
   c) pieauguma tempu procentos;

3) ķēdes un bāzes absolūto pieaugumu matemātiskās sakarības;

4) ķēdes un bāzes augšanas tempu matemātiskās sakarības;

5) pieauguma 1 procenta absolūto nozīmi.

3. uzdevums. Importa kravu pārvadājumu apjomu izmaiņas N autotransporta uzņēmumā 2011.—2015. gadā salīdzinājumā ar iepriekšējo gadu.

Gadi	Importa kravu pārvadājumu apjomu pieaugums vai samazinājums	
	t	%
2011	–29,4	–4,7
2012	185,2	30,1
2013	–23,2	–3,0
2014	–19,9	–2,6
2015	–18,2	–2,1

Aprēķināt:

1) importa kravu pārvadājumu apjoma izmaiņas 2015. gadā salīdzinājumā ar 2011. gadu:
   a) vērtības izteiksmē,
   b) procentos (ar vienu zīmi aiz komata);
2) importa kravu pārvadājumu:
   a) vidējo absolūto pieaugumu gadā, t,
   b) vidējo augšanas tempu gadā procentos,
   c) vidējo pieauguma tempu gadā procentos;
3) katrā gadā pieauguma 1 procenta absolūto nozīmi (ar divām zīmēm aiz komata).

4. uzdevums. Piena ražošana N reģiona saimniecībās 2023. gadā, tūkst. t (nosacīti dati).

Mēneši	Piens, tūkst. t
Janvāris	9,48
Februāris	9,14
Marts	11,06
Aprīlis	12,64
Maijs	15,50
Jūnijs	16,74
Jūlijs	17,34
Augusts	16,64
Septembris	14,50
Oktobris	12,60
Novembris	11,24
Decembris	9,76

Aprēķināt:

1) 2023. gada piena ražošanas:
   a) vidējo apjomu mēnesī (ar divām zīmēm aiz komata),
   b) vidējo absolūto pieaugumu mēnesī (ar vienu zīmi aiz komata);
2) piena ražošanas slīdošo intervālu summas (ar divām zīmēm aiz komata):
   a) trīs mēnešu,
   b) četru mēnešu;
3) piena ražošanas slīdošo vidējo skaitu mēnesī (ar divām zīmēm aiz komata):
   a) trīs mēnešu intervālam (necentrētos un centrētos),
   b) četru mēnešu intervālam (necentrētos un centrētos);
4) katram mēnesim piena ražošanas apjoma:
   a) sezonalitātes indeksus procentos,
   b) absolūto novirzi no mēneša vidējā līmeņa;
5) piena ražošanas:
   a) apjomu katrā ceturksnī,
   b) vidējo apjomu katrā ceturksnī;
6) katrā ceturksnī ražotā piena apjoma:
   a) sezonalitātes indeksus procentos,
   b) absolūto novirzi no mēneša vidējā līmeņa;
7) izveidot grafisko attēlu un iezīmēt aprēķinātā trenda līnijas.

9. INDEKSI

9.1. Indeksu jēdziens

Indeksi ir vieni no visvairāk izplatītajiem statistiskajiem rādītājiem. Tos lieto, lai raksturotu un analizētu atsevišķu uzņēmumu un nozaru saimniecisko darbību, raksturotu valsts ekonomikas attīstību, izdarītu starptautiskos salīdzinājumus.

Indeksi ir skaitliski rādītāji, kurus lieto saliktu sabiedrisko parādību relatīvo pārmaiņu raksturošanai un analīzei.

Pēc formas indeksi ir relatīvi lielumi, taču tie būtiski atšķiras no parastajiem relatīvajiem lielumiem. Turklāt ne visus relatīvos lielumus var uzskatīt par indeksiem.

Piemēram, indeksiem raksturīgajai konstrukcijai neatbilst struktūras, koordinācijas un intensitātes relatīvie lielumi.

Salīdzinājumā ar citiem rādītājiem, kuri raksturo absolūtās un relatīvās pārmaiņas, piemēram, absolūtais pieaugums (samazinājums), vidējais absolūtais pieaugums (samazinājums), augšanas temps, vidējais augšanas temps, indeksiem piemīt trīs principiālas atšķirības:

- indeksi ļauj izmērīt saliktu, sabiedrisku parādību pārmaiņas;
- indeksi ļauj izanalizēt atsevišķu faktoru lomu parādību pārmaiņās;
- indeksi ir rezultāts salīdzinājumam ne tikai ar iepriekšējo periodu, bet arī ar citu teritoriju.

Katrs indekss ietver divu veidu datus:

- pārskata datus, kuri jānovērtē (apzīmē ar zīmi "1");
- bāzes datus, kurus izmanto salīdzināšanai (apzīmē ar zīmi "0").

Turklāt indeksējamo rādītāju apzīmēšanai izmanto arī noteiktus simbolus, piemēram:

q – noteiktas preces daudzums naturālā izteiksmē;
p – preces vienības cena;
pq – produkcijas vai preču apgrozījuma vērtība;
z – produkcijas vienības pašizmaksa;
t – laika izlietojums produkcijas vienības ražošanai;
T – kopējais laika izlietojums vai nodarbināto skaits;
d – nodarbināto darba samaksa vērtības izteiksmē;
dT – darba samaksas fonds vērtības izteiksmē.

Visus ekonomiskos indeksus var klasificēt pēc daudzām pazīmēm, piemēram, pēc:

- **parādības aptveres pakāpes** (individuālie indeksi, kopindeksi, grupu indeksi);

- **izpētes objekta** (pašizmaksas, cenu, produkcijas fiziskā apjoma u. c. indeksi);
- **aprēķināšanas perioda** (gada, ceturkšņa, mēneša u. c. indeksi);
- **salīdzināšanas bāzes** (dinamikas un teritoriālie indeksi);
- **uzbūves formas** (vidējie indeksi un agregātindeksi);
- **parādības sastāva** (pastāvīgā un mainīgā sastāva indeksi).

9.2. Individuālie indeksi un kopindeksi

Atkarībā no indeksā ietvertās sabiedriskās parādības plašuma izšķir individuālos indeksus un kopindeksus.

Individuālie indeksi raksturo statistiskā kopuma atsevišķu vienību pārmaiņas. Tos apzīmē ar *i*. Tā, piemēram, ar individuālo indeksu var izteikt atsevišķa izstrādājuma un pakalpojuma veida realizācijas apjoma relatīvās pārmaiņas, atsevišķas preces cenas relatīvās pārmaiņas utt.

Individuālie indeksi pēc savas būtības ir parastie relatīvie lielumi (augšanas tempi, prognozes izpildes relatīvie lielumi u. c.).

Analīzē lieto daudzus individuālos indeksus.

Vieni no visvairāk izplatītajiem individuālajiem indeksiem ir fiziskā apjoma, cenu un produkcijas vērtības individuālie indeksi.

Fiziskā apjoma individuālo indeksu aprēķina pēc formulas:

$$iq = \frac{q_1}{q_0}.$$

Fiziskā apjoma indekss rāda, cik reizes mainījusies vienas noteiktas preces ražošana vai, ja indekss izteikts procentos, – par cik procentiem palielinājusies vai samazinājusies preču ražošana pārskata periodā, salīdzinot ar bāzes periodu. Indeksa saucējā var būt arī prognozētais ražošanas daudzums.

Cenu individuālais indekss *ip* raksturo vienas preču cenas izmaiņas pārskata periodā, salīdzinot ar bāzes periodu vai ar prognozēm:

$$ip = \frac{p_1}{p_0}.$$

Produkcijas vērtības individuālais indekss *ipq* rāda, cik reizes vai par cik procentiem mainījusies vienas noteiktas preces vērtība pārskata periodā p_1q_1, salīdzinot ar bāzes periodu p_0q_0:

$$ipq = \frac{p_1q_1}{p_0q_0}.$$

Starp individuālajiem indeksiem, kuri veido noteiktu sistēmu, pastāv matemātiskas sakarības. Piemēram, reizinot cenu individuālo indeksu ar fiziskā apjoma individuālo indeksu, var aprēķināt produkcijas vērtības indeksu:

$$\frac{p_1}{p_0} \cdot \frac{q_1}{q_0} = \frac{p_1q_1}{p_0q_0} \quad \text{vai} \quad i_p i_q = i_{pq}.$$

Matemātiskās sakarības pastāv arī starp attiecīgo indeksu absolūtajām starpībām. Produkcijas vērtības individuālo indeksu absolūtās starpības ļauj aprēķināt produkcijas fiziskā apjoma un cenu izmaiņu ietekmi uz produkcijas vērtības pieaugumu (samazinājumu).

Atsevišķam produkcijas veidam vērtības pieaugumu (samazinājumu) pārskata periodā salīdzinājumā ar bāzes periodu šo divu faktoru ietekmē aprēķina:

$$\Delta pq = p_1 q_1 - p_0 q_0,$$

tajā skaitā:

- **produkcijas fiziskā apjoma ietekmē** – $\Delta pq_{(q)} = (q_1 - q_0)p_0$;
- **cenu izmaiņu ietekmē** – $\Delta pq_{(p)} = (p_1 - p_0)q_1$.

Piemērs.

Ražotās eksportprodukcijas apjomi un cenas N uzņēmumā (nosacīti dati)

Produkcijas veidi	Bāzes periods		Pārskata periods	
	ražots, tūkst. gab.	cena, EUR	ražots, tūkst. gab.	cena, EUR
	q_0	p_0	q_1	p_1
A	10,0	3,5	15,0	4,7
B	26,0	48,0	22,0	54,0
C	3,0	136,0	3,6	133,0

Individuālie indeksi:

- cenu indekss (ip):

$$ip_A = \frac{4,7}{3,5} = 1,343 \text{ jeb } 134,3\,\%,$$

$$ip_B = \frac{54,0}{48,0} = 1,125 \text{ jeb } 112,5\,\%,$$

$$ip_C = \frac{133,0}{136,0} = 0,978 \text{ jeb } 97,8\,\%;$$

- ražošanas apjoma indekss (iq):

$$iq_A = \frac{15,0}{10,0} = 1,5 \text{ jeb } 150,0\,\%,$$

$$iq_B = \frac{22,0}{26,0} = 0,846 \text{ jeb } 84,6\,\%,$$

$$iq_C = \frac{3,6}{3,0} = 1,2 \text{ jeb } 120,0\,\%;$$

- produkcijas vērtības indekss ($ipq = \frac{p_1 q_1}{p_0 q_0}$):

$$ipq_A = \frac{15,0 \cdot 4,7}{10,0 \cdot 3,5} = \frac{70,5}{35,0} = 2,014 \text{ jeb } 201,4\ \% \text{ jeb } 2,0 \text{ reizes},$$

$$ipq_B = \frac{22,0 \cdot 54,0}{26,0 \cdot 48,0} = \frac{1188,0}{1248,0} = 0,952 \text{ jeb } 95,2\,\%,$$

$$ipq_C = \frac{3,6 \cdot 133,0}{3,0 \cdot 136} = \frac{478,8}{408,0} = 1,174 \text{ jeb } 117,4\,\%;$$

- matemātiskās sakarības:

$$ip_A iq_A = 1,343 \cdot 1,5 = 2,015 = 201,5\ \%,$$

$$ip_B iq_B = 1,125 \cdot 0,846 = 0,952 = 95,2\ \%,$$

$$ip_C iq_C = 0,978 \cdot 1,2 = 1,174 = 117,4\ \%;$$

- $\Delta pq = p_1 q_1 - p_0 q_0$:

$$\Delta pq_A = 70,5 - 35,0 = 35,5 \text{ tūkst. EUR},$$

$$(q_1 - q_0)p_0 = (15,0 - 10,0)3,5 = 17,5 \text{ tūkst. EUR},$$

$$(p_1 - p_0)q_1 = (4,7 - 3,5)15,0 = 18,0 \text{ tūkst. EUR},$$

$$\Delta pq_B = 1188,0 - 1248,0 = -60,0 \text{ tūkst. EUR},$$

$$(22,0 - 26,0)48,0 = -192,0 \text{ tūkst. EUR},$$

$$(54,0 - 48,0)22,0 = 132,0 \text{ tūkst. EUR},$$

$$\Delta pq_C = 478,8 - 408,0 = 70,8 \text{ tūkst. EUR},$$

$$(3,6 - 3,0)136,0 = 81,6 \text{ tūkst. EUR},$$

$$(133,0 - 136,0)3,6 = -10,8 \text{ tūkst. EUR}.$$

Pēc aprēķiniem redzams, ka pārskata periodā A produkcijas veida cena palielinājusies par 34,3 %, B produkcijas veida cena palielinājusies par 12,5 %, bet C produkcijas veida cena samazinājusies par 2,2 %.

A un C produkcijas veidu ražošanas apjomi palielinājušies attiecīgi par 50 % un 20 %, bet B produkcijas veida ražošana samazinājusies par 16,4 %.

Kopindeksi raksturo saliktu parādību visu vienību pārmaiņas, piemēram, uzņēmuma preču produkcijas ražošanas kopapjoma relatīvās pārmaiņas. Kopindeksus apzīmē ar *I*.

Kopindeksu īpatnība ir tā, ka tie pilda gan sintētiska, gan analītiska rakstura funkcijas.

Sintētiskā funkcija nozīmē, ka indekss apvieno un padara salīdzināmus saliktas parādības atsevišķos elementus un raksturo parādības pārmaiņas. Piemēram, salikta sabiedriska parādība ir preču un pakalpojumu cena, ar kuru saprot nevis konkrētas preces un pakalpojuma cenu, bet to vispārējo līmeni, kas veidojas no daudzām preču un pakalpojumu cenām, kuras, tieši summējot, nav iespējams apvienot un izteikt ar vienu rādītāju.

Analītiskā funkcija izpaužas saliktu parādību izteicošā rādītāja sadalīšanā atbilstoši to veidojušiem faktoriem, kā arī to nozīmes raksturošanā.

Kopindeksu veido divi elementi: indeksējamais elements un samērotājs.

Indeksējamais elements ir parādība, kuru pēta, savukārt **samērotāja** uzdevums ir radīt apstākļus saliktas parādības pētīšanai.

Izvēloties samērotājus (svarus), jāievēro samērotāja saturs un samērotāja periods. **Samērotāja perioda** izvēle ir atkarīga no analīzes uzdevumiem. **Samērotāja saturam** jābūt būtiski un tieši saistītam ar indeksējamo parādību, lai iegūtu reizinājumu ar reālu ekonomisko saturu (piemēram, ražotās produkcijas apjoma un cenu reizinājums, ražotās produkcijas apjoma un pašizmaksas reizinājums u. c.).

Produkcijas vērtības (preču apgrozījuma) kopindekss I_{pq} raksturo attiecību starp produkcijas vērtību pārskata periodā un produkcijas vērtību bāzes periodā. To aprēķina pēc formulas:

$$I_{pq} = \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_0 p_0}.$$

Izmantojot dotā piemēra datus, jāaprēķina ražotās eksportprodukcijas vērtības dinamika:

$$I_{pq} = \frac{15{,}0 \cdot 4{,}7 + 22{,}0 \cdot 54{,}0 + 3{,}6 \cdot 133{,}0}{10{,}0 \cdot 3{,}5 + 26{,}0 \cdot 48{,}0 + 3{,}0 \cdot 136{,}0} = \frac{1737{,}3}{1691{,}0} = 1{,}027 \text{ jeb } 102{,}7\,\%.$$

Tātad pārskata periodā ražotās eksportprodukcijas vērtība palielinājusies par 2,7 %, kas absolūtā izteiksmē ir 46,3 tūkst. EUR:

$$\sum q_1 p_1 - \sum q_0 p_0 = 1737{,}3 - 1691{,}0 = 46{,}3.$$

Līdztekus vērtības apjoma kopindeksam var minēt arī dažus citus kvantitatīvo parādību kopindeksus, kuru formulās nav samērotāja.

Ražošanas izmaksu (pašizmaksas) kopindekss:

$$I_{zq} = \frac{\sum z_1 q_1}{\sum z_0 q_0},$$

kur $z_1 q_1$ un $z_0 q_0$ – ražošanas faktiskās izmaksas (EUR) pārskata un bāzes periodā.

Izlietotā darba kopindekss:

$$I_{tq} = \frac{\sum t_1 q_1}{\sum t_0 q_0},$$

kur $t_1 q_1$ un $t_0 q_0$ – kopējais faktiskais darba daudzums (cilvēkstundās vai cilvēkdienās), kas izlietots produkcijas ražošanai pārskata un bāzes periodā.

Iepriekš tika uzsvērts, ka produkcijas vērtību iegūst, reizinot produkcijas daudzumu naturālā izteiksmē ar tās cenu. Tas nozīmē, ka produkcijas vērtības pieaugumu vai samazinājumu ietekmē divi faktori:

- produkcijas daudzuma pieaugums vai samazinājums,

- cenu pieaugums vai samazinājums.

Tas rada iespēju papildus produkcijas vērtības kopindeksam izveidot vēl divus kopindeksus:

- produkcijas fiziskā apjoma kopindeksu,
- cenu kopindeksu.

Produkcijas fiziskā apjoma kopindekss ir kvantitatīvā rādītāja indekss. Šajā indeksā indeksējamais lielums būs produkcijas daudzums naturālā izteiksmē, bet svari būs cena. Tā kā fiziskā apjoma indekss ir kvantitatīvā rādītāja indekss, tad par svariem parasti lieto bāzes perioda cenas.

Fiziskā apjoma kopindeksu aprēķina pēc formulas:

$$I_q = \frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0}.$$

Par samērotājiem šajā kopindeksā kalpo bāzes perioda nemainīgās cenas (p_0). Skaitītājs raksturo pārskata periodā ražotās (realizētās) produkcijas apjomu bāzes perioda cenās, saucējs – bāzes perioda produkcijas apjomu bāzes perioda cenās. Šis indekss nosaukts vācu zinātnieka **E. Laspeiresa** vārdā. Fiziskā apjoma kopindekss ir šāds:

$$I_q = \frac{15{,}0 \cdot 3{,}5 + 22{,}0 \cdot 48{,}0 + 3{,}6 \cdot 136{,}0}{10{,}0 \cdot 3{,}5 + 26{,}0 \cdot 48{,}0 + 3{,}0 \cdot 136{,}0} = \frac{1598{,}1}{1691{,}0} = 0{,}945 \text{ jeb } 94{,}5\,\%.$$

Tātad pārskata periodā eksportpreču ražošanas apjoms samazinājies par 5,5 %. Absolūtajā izteiksmē tas būs (–)92,9 tūkst. EUR:

$$\sum q_1 p_0 - \sum q_0 p_0 = 1598{,}1 - 1691{,}0 = -92{,}9.$$

Vācu statistiķis **G. Paašē** ieteica fiziskā apjoma kopindeksu aprēķināt pēc formulas:

$$I_q = \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_0 p_1}.$$

Par samērotājiem šajā kopindeksā kalpo pārskata perioda cenas (p_1). Skaitītājs raksturo ražotās vai realizētās produkcijas (pakalpojumu) apjomu pārskata periodā, izteiktu tā paša perioda cenās, bet saucējs raksturo ražotās (realizētās) produkcijas apjomu bāzes gadā, pārrēķinātu pārskata perioda cenās:

$$I_q = \frac{15{,}0 \cdot 4{,}7 + 22{,}0 \cdot 54{,}0 + 3{,}6 \cdot 133{,}0}{10{,}0 \cdot 4{,}7 + 26{,}0 \cdot 54{,}0 + 3{,}0 \cdot 133{,}0} = \frac{1737{,}3}{1850{,}0} = 0{,}939 \text{ jeb } 93{,}9\,\%.$$

Cenu kopindekss arī ir kvalitatīvā rādītāja indekss. Šajā indeksā indeksējamais elements ir cena. Par samērotāju pieņem preču (pakalpojumu) ražošanas vai realizācijas apjomus pārskata periodā (q_1). Cenu kopindeksa formula ir:

$$I_p = \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_1 p_0},$$

kur $\sum p_1 q_1$ – ražotās vai realizētās produkcijas (pakalpojumu) apjoms pārskata periodā, izteikts tā paša perioda cenās;

$\sum p_0 q_1$ – ražotās vai realizētās produkcijas (pakalpojumu) apjoms pārskata periodā, izteikts bāzes perioda cenās.

Šis indekss nosaukts vācu statistiķa G. Paašē vārdā. Pēc iepriekšminētā piemēra cenu kopindekss ir:

$$I_p = \frac{4{,}7 \cdot 15{,}0 + 54{,}0 \cdot 22{,}0 + 133{,}0 \cdot 3{,}6}{3{,}5 \cdot 15{,}0 + 48{,}0 \cdot 22{,}0 + 136{,}0 \cdot 3{,}6} = \frac{1737{,}3}{1589{,}1} = 1{,}087 \text{ jeb } 108{,}7\,\%.$$

Tas nozīmē, ka pārskata periodā, salīdzinot ar bāzes periodu, cenas vidēji palielinājušās par 8,7 %. Absolūtajā izteiksmē tas ir 139,2 tūkst. EUR:

$$\sum p_1 q_1 - \sum p_0 q_1 = 1737{,}3 - 1598{,}1 = 139{,}2.$$

Cenu kopindeksu var aprēķināt arī citādi, ņemot par samērotāju produkcijas (pakalpojumu) ražošanas, realizācijas apjomu bāzes periodā (q_0). Cenu kopindeksa formula tad būs:

$$I_p = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0}.$$

Šī formula nosaukta vācu ekonomista E. Laspeiresa vārdā. Pēc šīs formulas cenu indekss ir:

$$I_p = \frac{4{,}7 \cdot 10{,}0 + 54{,}0 \cdot 26{,}0 + 133{,}0 \cdot 3{,}0}{3{,}5 \cdot 10{,}0 + 48{,}0 \cdot 26{,}0 + 136{,}0 \cdot 3{,}0} = 1{,}094 \text{ jeb } 109{,}4\,\%.$$

Atšķirības cenu kopindeksos saistītas ar to, ka Paašē indekss raksturo cenu izmaiņas precēm un pakalpojumiem, kas realizēti (ražoti) pārskata periodā. Laspeiresa indekss raksturo cenu izmaiņu ietekmi uz precēm un pakalpojumiem, kas realizēti (ražoti) bāzes periodā.

Ja analīzes uzdevums ir noteikt cenu izmaiņu ekonomisko efektu pārskata periodā, salīdzinot ar bāzes periodu, tad lieto Paašē indeksu, kas atspoguļo starpību starp preču faktisko vērtību pārskata periodā ($\sum p_1 q_1$) un šo preču pārrēķināto vērtību bāzes perioda cenās ($\sum p_0 q_1$).

Ja analīzes uzdevums ir preču (pakalpojumu) vērtības noteikšana nākamajos periodos, realizējot tos tādos pašos apjomos, bet par jaunām cenām, tad lieto Laspeiresa indeksu. Šis indekss ļauj aprēķināt starpību starp preču (pakalpojumu) faktisko vērtību bāzes periodā ($\sum p_0 q_0$) un iespējamo preču (pakalpojumu) vērtību, realizējot tos pašus apjomus par jaunām cenām ($\sum q_0 p_1$). Tas dod iespēju prognozēt preču (pakalpojumu) realizācijas apjomus tādā gadījumā, ja cenas nākamajos periodos mainās.

Sintezējot cenu kopindeksu, faktisko preču (pakalpojumu) apjomu vietā var ņemt preču (pakalpojumu) vidējos apjomus par diviem vai vairākiem periodiem.

Cenu kopindeksa formula tad būs:

$$I_p = \frac{\sum p_1 \overline{q}}{\sum p_0 \overline{q}},$$

kur $\overline{q}$ – vidējais realizētais preču (pakalpojumu) apjoms analizējamā periodā.

Literatūrā šis indekss pazīstams kā Lova indekss.

Ja dati par produkcijas realizācijas apjomiem ir tikai par bāzes un pārskata periodu, tad vidējo produkcijas realizācijas apjomu aprēķina pēc formulas:

$$\overline{q} = \frac{q_0 + q_1}{2}.$$

Pēc iepriekšminētā uzdevuma datiem vidējie produkcijas apjomi ir:

A produkcijas veidam $(10{,}0 + 15{,}0)/2 = 12{,}5$ tūkst. gab.,

B produkcijas veidam $(26{,}0 + 22{,}0)/2 = 24{,}0$ tūkst. gab.,

C produkcijas veidam $(3{,}0 + 3{,}6)/2 = 3{,}3$ tūkst. gab.,

$$I_p = \frac{4{,}7 \cdot 12{,}5 + 54{,}0 \cdot 24{,}0 + 133{,}0 \cdot 3{,}3}{3{,}5 \cdot 12{,}5 + 48{,}0 \cdot 24{,}0 + 36{,}0 \cdot 3{,}3} = 1{,}091 \text{ jeb } 109{,}1\,\%.$$

Tas nozīmē, ka kārtējā periodā cenas vidēji palielinājās par 9,01 %. Lova indeksu lieto produkcijas realizācijas vai iepirkumu analīzē ilgstošos laika periodos, jo tas dod iespēju analizēt cenas gadījumā, kad mainās preču sortiments.

9.3. Kopindeksu savstarpējās matemātiskās sakarības

Saliktas ekonomiskās parādības, kas ir indeksu metodes pētījumu objekts, atrodas savstarpējā mijiedarbībā. Tas, ka pētāmās ekonomiskās parādības ir objektīvi savstarpēji saistītas, dod pamatu uzskatīt, ka starp tām jāpastāv matemātiskai sakarībai.

Indeksu matemātiskās sakarības ļauj aprēķināt trūkstošos indeksus, neizmantojot absolūtos sākotnējos datus. Tam ir arī praktiska nozīme, jo ne vienmēr ekonomistu analītiķu rīcībā ir indeksu aprēķināšanai nepieciešamie dati, bet, ja arī ir, tad daudzos gadījumos vienkāršāk ir aprēķināt nezināmo indeksu, izmantojot indeksu savstarpējās sakarības.

Jāatzīmē, ka matemātiska sakarība nepastāv starp visiem indeksiem, bet tikai starp tiem, kuri veido noteiktu sistēmu.

Kopindeksu **savstarpējās matemātiskajās sakarībās** liela nozīme ir **indeksu svariem**. Savstarpēji saistīto parādību kopindeksi ir matemātiski saistīti tikai tad, ja faktoriālo indeksu svēršanā ir ievērots vispārīgais princips par kvantitatīvo parādību svēršanu ar bāzes perioda svariem un kvalitatīvo parādību svēršanu ar pārskata perioda svariem. Tādā gadījumā, reizinot divus faktoriālos indeksus, matemātiski saistās to attiecīgie skaitliskie lielumi un rodas iespēja izveidoties trešajam, formas un ekonomiskā satura ziņā pamatotam rezultatīvam indeksam.

Atbilstoši šo parādību ekonomiskajai sakarībai matemātiskā sakarība pastāv starp cenu, fiziskā apjoma un vērtības apjoma kopindeksiem, starp vidējās darba algas, nodarbināto skaita un darba samaksas fonda kopindeksiem, starp kopražas, ražības un sējumu platības kopindeksiem.

Piemēram, reizinot Laspeiresa fiziskā apjoma un Paašē cenu kopindeksus, iegūst vērtības apjoma kopindeksu:

$$I_q \cdot I_p = I_{pq},$$

$$\frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0} \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1}.$$

Izmantojot iepriekšminētā piemēra datus, var aprēķināt vērtības apjoma kopindeksu:

$$1{,}087 \cdot 0{,}945 = 1{,}027.$$

Arī starp indeksu absolūtajām starpībām pastāv matemātiskās sakarības. Piemēram, vērtības apjoma kopindeksa absolūtā starpība ir vienāda ar Laspeiresa fiziskā apjoma kopindeksa un Paašē cenu kopindeksa absolūto starpību summu:

$$\sum p_1 q_1 - \sum q_0 p_0 = \left(\sum q_1 p_1 - \sum q_0 p_0\right) + \left(\sum q_1 p_1 - \sum q_1 p_0\right),$$

$$1737{,}3 - 1691{,}0 = \left(1598{,}1 - 1691{,}0\right) + \left(1737{,}3 - 1598{,}1\right),$$

46,3 tūkst. EUR = –92,9 tūkst. EUR + 139,2 tūkst. EUR.

Tātad saražotās eksportprodukcijas vērtība pārskata periodā, salīdzinot ar bāzes periodu, palielinājusies par 46,3 tūkst. EUR. To ietekmējuši divi faktori: cenu pieaugums par 139,2 tūkst. EUR un ražošanas apjoma samazināšanās par 92,9 tūkst. EUR.

Savstarpēji saistītos kopindeksus plaši lieto faktoru analīzē, nosakot ekstensīvo un intensīvo faktoru ietekmi, kā arī pētāmās kopas struktūras pārmaiņu ietekmes izzināšanai.

Indeksu absolūto starpību savstarpējā sakarība rada iespēju aprēķināt katra faktora (produkcijas fiziskā apjoma un cenas) ietekmi uz produkcijas vērtības absolūto pieaugumu (samazinājumu). To aprēķina, dalot produkcijas vērtības pieaugumu (samazinājumu) konkrēta faktora ietekmē ar produkcijas vērtības absolūto pieaugumu (samazinājumu).

Pēc dotā piemēra:

$$\frac{\Delta pq(q)}{\Delta pq} 100 = \frac{-92{,}9}{46{,}3} 100 = -200{,}6\ \%,$$

$$\frac{\Delta pq(p)}{\Delta pq} 100 = \frac{139{,}2}{46{,}3} = 300{,}6\ \%.$$

Aprēķina rezultāti rāda, ka saražotās produkcijas vērtība tās fiziskā apjoma rezultātā samazinājusies par 200,6 % jeb divas reizes un cenu pieauguma rezultātā palielinājusies par 300,6 % jeb trīs reizes.

Indeksu savstarpējās sakarības metodi praksē lieto arī tad, kad indeksu tiešā aprēķināšana ir sarežģīta un var radīt kļūdainus rezultātus. Tad par sākotnējo materiālu izmanto divus jau gatavus indeksus, kuru ticamība ir pietiekami augsta.

Piemēram, ja ir zināms, ka nodarbināto skaits kādā nozarē (uzņēmumā) pārskata periodā, salīdzinot ar bāzes periodu, samazinājies par 7 % ($I_T = 0{,}93$), bet saražotās produkcijas fiziskais apjoms palielinājies par 9 % ($I = 1{,}09$), tad bez attiecīgas tiešās sākotnējās informācijas iegūšanas var aprēķināt šādus ekonomiskās analīzes ziņā svarīgus indeksus, kas izsaka kvalitatīvu parādību pārmaiņas:

- **darba ražīguma indeksu:**

$$I_v = \frac{I_q}{I_T} = \frac{1{,}09}{0{,}93} = 1{,}172 = 17{,}2\ \%;$$

- **darbietilpības indeksu:**

$$I_t = \frac{I_T}{I_q} = \frac{0{,}93}{1{,}09} = 0{,}853 = 85{,}3\ \%.$$

Darbietilpības indekss ir apgriezts darba ražīguma indekss:

$$I_t = \frac{1}{I_v} = \frac{1}{1{,}172} = 0{,}853 = 85{,}3\ \%.$$

Pretēja sakarība ir viens no indeksu savstarpējās sakarības paveidiem. Tā pastāv tikai tad, kad tā izsaka reāli savstarpēji pretējā sakarībā esošu parādību pārmaiņas.

Piemēram, pretējas sakarības pastāv starp cenu un naudas pirktspējas indeksiem, starp materiālizmantošanas un materiālietilpības indeksiem.

Piemēram, ja zināms, ka mazumtirdzniecības cenas pārskata periodā salīdzinājumā ar bāzes periodu samazinājušās par 4 % ($I_p = 0{,}96$), tad var aprēķināt, ka naudas pirktspēja pieaugusi par:

$$I_{pirktspēja} = \frac{1}{0{,}96} = 1{,}042 \text{ jeb } 104{,}2\ \%.$$

Analogas matemātiskas sakarības saista arī citus kopindeksus, piemēram, ražošanas izmaksu, vienības pašizmaksas un ražotās produkcijas fiziskā apjoma kopindeksus:

$$I_{zq} = I_z I_q \text{ vai}$$

$$\frac{\sum z_1 q_1}{\sum z_0 q_0} = \frac{\sum z_1 q_1}{\sum z_0 q_1} \frac{\sum z_0 q_1}{\sum z_0 q_0}.$$

Ekonomisko parādību galvenie kopindeksi

Indeksa nosaukums Indeksa formula	Ko raksturo indekss	Ko raksturo izteiksme $I - 100$	Ko raksturo indeksa absolūtā starpība
Produkcijas fiziskā apjoma kopindekss (E. Laspeiress) $I_q = \frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0}$	Cik reizes izmainījusies produkcijas vērtība tās fiziskā apjoma izmaiņu rezultātā, vai cik procentus veido produkcijas vērtības augšana (samazināšanās) tās fiziskā apjoma izmaiņu rezultātā	Par cik % palielinājusies (samazinājusies) produkcijas vērtība tās fiziskā apjoma izmaiņu rezultātā	Produkcijas vērtības pieaugumu (samazinājumu) tās fiziskā apjoma izmaiņu rezultātā
Cenu kopindekss (G. Paašē) $I_p = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1}$	Cik reizes izmainījusies produkcijas vērtība tās cenu izmaiņu rezultātā, vai cik procentus veido produkcijas vērtības augšana (samazināšanās) tās cenu izmaiņu rezultātā	Par cik % palielinājusies (samazinājusies) produkcijas vērtība tās cenu izmaiņu rezultātā	Produkcijas vērtības pieaugumu (samazinājumu) tās cenu izmaiņu rezultātā
Produkcijas vērtības (preču apgrozījuma) kopindekss $I_{pq} = \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_0 p_0}$	Cik reizes izmainījusies produkcijas vērtība, vai cik procentus veido produkcijas vērtības augšana (samazināšanās) pārskata periodā salīdzinājumā ar bāzes periodu	Par cik % palielinājusies (samazinājusies) produkcijas vērtība pārskata periodā salīdzinājumā ar bāzes periodu	Produkcijas vērtības pieaugumu (samazinājumu) pārskata periodā salīdzinājumā ar bāzes periodu
Produkcijas fiziskā apjoma kopindekss $I_q = \frac{\sum q_1 z_0}{\sum q_0 z_0}$	Cik reizes izmainījušās produkcijas izmaksas tās fiziskā apjoma izmaiņu rezultātā, vai cik procentus veido produkcijas ražošanas izmaksu augšana (samazināšanās) tās fiziskā apjoma izmaiņu rezultātā	Par cik % palielinājušās (samazinājušās) produkcijas ražošanas izmaksas tās fiziskā apjoma izmaiņu rezultātā	Produkcijas ražošanas izmaksu pieaugumu (samazinājumu) tās fiziskā apjoma izmaiņu rezultātā
Produkcijas vienības pašizmaksas kopindekss $I_z = \frac{\sum z_1 q_1}{\sum z_0 q_1}$	Cik reizes izmainījušās produkcijas ražošanas izmaksas produkcijas vienības pašizmaksas izmaiņu rezultātā, vai cik procentus veido produkcijas ražošanas izmaksu augšana (samazināšanās) tās vienības pašizmaksas izmaiņu rezultātā	Par cik % palielinājušās (samazinājušās) produkcijas ražošanas izmaksas tās vienības pašizmaksas izmaiņu rezultātā	Produkcijas ražošanas izmaksu pieaugumu (samazinājumu) tās vienības pašizmaksas izmaiņu rezultātā

Indeksa nosaukums Indeksa formula	Ko raksturo indekss	Ko raksturo izteiksme $I - 100$	Ko raksturo indeksa absolūtā starpība
Ražošanas izmaksu kopindekss $I_{zq} = \frac{\sum z_1 q_1}{\sum z_0 q_0}$	Cik reizes izmainījušās produkcijas ražošanas izmaksas, vai cik procentus veido produkcijas ražošanas izmaksu augšana (samazināšanās) pārskata periodā salīdzinājumā ar bāzes periodu	Par cik % palielinājušās (samazinājušās) produkcijas ražošanas izmaksas pārskata periodā salīdzinājumā ar bāzes periodu	Produkcijas ražošanas izmaksu pieaugumu (samazinājumu) pārskata periodā salīdzinājumā ar bāzes periodu
Produkcijas fiziskā apjoma indekss $I_q = \frac{\sum q_1 t_0}{\sum q_0 t_0}$	Cik reizes izmainījies produkcijas ražošanai izlietotais darba laiks tā fiziskā apjoma izmaiņu rezultātā, vai cik procentus veido produkcijas ražošanai izlietotā darba laika augšana (samazināšanās) tā fiziskā apjoma izmaiņu rezultātā	Par cik % palielinājies (samazinājies) produkcijas ražošanai izlietotais darba laiks tās fiziskā apjoma izmaiņu rezultātā	Produkcijas ražošanai izlietotā darba laika pieaugumu (samazinājumu) tās fiziskā apjoma izmaiņu rezultātā
Produkcijas darbietilpības indekss $I_t = \frac{\sum t_1 q_1}{\sum t_0 q_1}$	Cik reizes izmainījies produkcijas ražošanai izlietotais darba laiks tās darbietilpības izmaiņu rezultātā, vai cik procentus veido produkcijas ražošanai izlietotā darba laika augšana (samazināšanās) tās darbietilpības izmaiņu rezultātā	Par cik % palielinājies (samazinājies) produkcijas ražošanai izlietotais darba laiks tās darbietilpības izmaiņu rezultātā	Produkcijas ražošanai izlietotā darba laika pieaugumu (samazinājumu) tās darbietilpības izmaiņu rezultātā
Izlietotā darba laika kopindekss $I_{tq} = \frac{\sum q_1 t_1}{\sum q_0 t_0}$	Cik reizes izmainījies produkcijas ražošanai izlietotais darba laiks, vai cik procentus veido ražošanai izlietotā darba laika augšana (samazināšanās) pārskata periodā salīdzinājumā ar bāzes periodu	Par cik % palielinājies (samazinājies) produkcijas ražošanai izlietotais darba laiks pārskata periodā salīdzinājumā ar bāzes periodu	Produkcijas ražošanai izlietotā darba laika pieaugumu (samazinājumu) pārskata periodā salīdzinājumā ar bāzes periodu

9.4. Agregātindeksi un vidējie indeksi

Jebkura indeksa sākotnējā un galvenā forma ir agregātindeksa forma.

Agregātindekss veidojas divu absolūto summāro lielumu (agregātu) pretstatīšanas rezultātā. Piemēram, cenu kopindekss

$$I_p = \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_1 p_0}$$

ir agregātindekss, jo tā skaitītājs un saucējs ir noteiktas ekonomiskas parādības attiecīgo periodu pilna summa jeb agregāts. Indeksa skaitītājs $\sum q_1 p_1$ ir reāls lielums (faktiskais preču vai pakalpojumu apjoms pārskata periodā), saucējs $\sum q_1 p_0$ ir nosacīts lielums, kas izsaka pārskata periodā saražoto preču (pakalpojumu) apjomu bāzes perioda cenās.

Lai aprēķinātu agregātindeksu, nepieciešama plaša sākotnējā informācija par parādības tiešajiem lielumiem, atsevišķi par katru indeksējamā elementa un samērotāja vienību. Piemēram, lai aprēķinātu cenu agregātindeksu, jāzina pārskata un bāzes perioda cenas p_1 un p_0, kā arī saražotie (realizētie) katra produkcijas veida apjomi q_1. Praktiski tas ne vienmēr ir iespējams, tāpēc cenu agregātindeksu pārveido **vidējā indeksa** formā.

Visvairāk lietotie un ekonomiski vispamatotākie ir aritmētiskais vidējais un harmoniskais vidējais indekss.

Aritmētiskais vidējais indekss ir individuālo indeksu svērtais aritmētiskais vidējais. Lai agregātindeksu pārveidotu par aritmētisko vidējo indeksu, skaitītājā esošo indeksējamā elementa nozīmi aizstāj ar individuālā indeksa un indeksējamā elementa saucēja reizinājumu.

Pārveidosim cenu un fiziskā apjoma agregātindeksus par cenu un fiziskā apjoma aritmētiskiem vidējiem indeksiem.

Cenu $I_p = \dfrac{\sum q_1 p_1}{\sum q_1 p_0}, \quad i_p = \dfrac{p_1}{p_0}, \quad p_1 = i_p p_0.$

Cenu aritmētiskais vidējais indekss būs: $I_p = \dfrac{\sum q_1 i_p p_0}{\sum q_1 p_0}.$

Fiziskā apjoma indekss: $I_q = \dfrac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0}, \quad i_q = \dfrac{q_1}{q_0}, \quad q_1 = i_p q_0.$

Fiziskā apjoma aritmētiskais vidējais indekss: $I_q = \dfrac{\sum q_0 i_q p_0}{\sum q_0 p_0}.$

Piemērs.

Saražotās produkcijas apjoms bāzes gadā un tās fiziskā apjoma un cenu pārmaiņas pārskata gadā salīdzinājumā ar bāzes gadu (nosacīti dati)

Produkcijas veidi	Produkcijas apjoms bāzes gadā, tūkst. EUR	Fiziskā apjoma pārmaiņas, %	Cenu izmaiņas, %
	q_0p_0	$i_q = \frac{q_1}{q_0}$	$i_p = \frac{p_1}{p_0}$
Sieviešu kostīmi	45,0	3,5	–2,0
Vīriešu uzvalki	60,0	1,6	–5,4
Bērnu mēteļi	52,0	–7,8	1,1
Kopā	157,0	×	×

Pārskata gadā saražotās produkcijas vērtība bāzes gada cenās:

$$\sum q_1 p_0 = 45{,}0 \cdot 10{,}35 + 60{,}0 \cdot 1{,}016 + 52{,}0 \cdot 0{,}922 = 155{,}48 \text{ tūkst. EUR.}$$

Bāzes gadā saražotās produkcijas vērtība bāzes gada cenās:

$$\sum q_0 p_1 = 45{,}0 \cdot 0{,}98 + 60{,}0 \cdot 0{,}946 + 52{,}0 \cdot 1{,}011 = 153{,}43 \text{ tūkst. EUR.}$$

Fiziskā apjoma kopindekss (pēc Laspeiresa formulas), %:

$$\frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0} = \frac{155{,}48}{157{,}0} = 0{,}9903 = 99{,}03\ \%.$$

Cenu kopindekss (pēc Laspeiresa formulas), %:

$$\frac{\sum q_0 p_1}{\sum q_0 p_0} = \frac{153{,}48}{157{,}0} = 0{,}9776 = 97{,}76\ \%.$$

Harmoniskais vidējais indekss ir individuālo indeksu svērtais harmoniskais vidējais. Lai agregātindeksus pārveidotu par harmoniskiem vidējiem indeksiem, saucējā esošo indeksējamā elementa nozīmi aizstāj ar indeksējamā elementa skaitītāja nozīmes un individuālā indeksa dalījumu. Tādējādi cenu un fiziskā apjoma harmoniskie vidējie indeksi būs:

$$I_p = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum \frac{p_1 q_1}{i_p}} \text{ un } I_q = \frac{\sum q_1 p_0}{\sum \frac{q_1 p_0}{i_q}}.$$

Izvirzot jautājumu par agregātindeksa aizstāšanu ar vidējo indeksu, jāņem vērā šī uzdevuma teorētiskā un praktiskā puse. Teorētiski vidējā indeksā (pēc izvēles – gan aritmētiskā, gan harmoniskā vidējā) var pārveidot jebkura veida samērotāju saturošu agregātindeksu, taču praktiski to darīt ir vērts tikai tad, ja indeksa pārveidošanas rezultātā tiek atvieglots (kļūst lētāks) ar indeksa aprēķināšanu saistītais darbs (galvenokārt sākotnējās informācijas uzkrāšanai un tās piemērošanai indeksa formulai).

9.5. Indeksu rindas

Statistiskajā analīzē līdzās atsevišķiem pastāvīgiem indeksiem lieto arī indeksu rindas – indeksu sistēmas.

Indeksu sistēma ir secīgi veidota indeksu rinda.

Ja indeksus izmanto sabiedrisko parādību dinamikas pētīšanai, tad indeksu rindas būtība ir analoga augšanas tempu rindām.

Indeksu sistēmas, tāpat kā augšanas tempus, atkarībā no indeksējamā elementa bāzes rakstura iedala:

- ķēdes indeksu sistēmās,
- bāzes indeksu sistēmās.

Ķēdes indeksu sistēma ir secīga indeksu rinda, kas aprēķināta vienai sociālekonomiskai parādībai ar mainīgu salīdzinājuma bāzi.

Bāzes indeksu sistēma ir pastāvīga salīdzinājuma bāze.

Sociālekonomiskos un statistiskos pētījumos indeksu sistēmas (ķēdes vai bāzes sistēmas) ir atkarīgas no analīzes mērķa.

Bāzes indeksi raksturo pētāmās parādības kopējo attīstības tendenci, bet ķēdes indeksi precīzi parāda līmeņu pārmaiņu secību laikā.

Ķēdes un bāzes indeksu sistēmu var veidot individuāliem indeksiem un kopindeksiem.

Indeksu sistēma:

	Ķēdes	Bāzes
fiziskā apjoma indeksi:	$\frac{q_1}{q_0}; \frac{q_2}{q_1}; \ldots; \frac{q_n}{q_{n-1}};$	$\frac{q_1}{q_0}; \frac{q_2}{q_0}; \ldots; \frac{q_n}{q_0};$
cenu indeksi:	$\frac{p_1}{p_0}; \frac{p_2}{p_1}; \ldots; \frac{p_n}{p_{n-1}};$	$\frac{p_1}{p_0}; \frac{p_2}{p_0}; \ldots; \frac{p_n}{p_0};$
vērtības indeksi:	$\frac{p_1q_1}{p_0q_0}; \frac{p_2q_2}{p_1q_1}; \ldots ; \frac{p_nq_n}{p_{n-1}q_{n-1}};$	$\frac{p_1q_1}{p_0q_0}; \frac{p_2q_2}{p_0q_0}; \ldots; \frac{p_nq_n}{p_0q_0}.$

Starp ķēdes un bāzes individuālajiem indeksiem pastāv šādas sakarības:

- reizinot ķēdes indeksus (ja tie ir zināmi), var iegūt bāzes indeksus:

$$\frac{p_1}{p_0}\cdot\frac{p_2}{p_1}=\frac{p_2}{p_0} \quad \text{vai} \quad \frac{q_1}{q_0}\cdot\frac{q_2}{q_1}\cdot\frac{q_3}{q_2}\cdot\frac{q_4}{q_3}=\frac{q_4}{q_0};$$

- dalot bāzes indeksus, var aprēķināt ķēdes indeksus:

$$\frac{p_2}{p_0}:\frac{p_1}{p_0}=\frac{p_2}{p_1} \quad \text{vai} \quad \frac{q_4}{q_0}:\frac{q_3}{q_0}=\frac{q_4}{q_3}.$$

Ķēdes un bāzes indeksu sistēmas var izveidot arī no agregātindeksiem.

Ķēdes indeksi:

$$\frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_0};\frac{\sum p_2q_2}{\sum p_1q_1};\ldots;\frac{\sum p_nq_n}{\sum p_{n-1}q_{n-1}}.$$

Bāzes indeksi:

$$\frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_0};\frac{\sum p_2q_2}{\sum p_0q_0};\ldots;\frac{\sum p_nq_n}{\sum p_0q_0}.$$

Indeksu sistēmas, piemēram, cenu vai fiziskā apjoma indeksu, veidošana atšķiras no iepriekš aplūkotajām indeksu sistēmām, jo šo indeksu sistēmu veidošanā var lietot pastāvīgos un mainīgos svarus.

Indeksu sistēma ar pastāvīgiem svariem ir kopindeksu sistēma, kur visiem indeksiem ir viena un tā paša perioda svari. Pastāvīgie svari ļauj izslēgt struktūras pārmaiņas ietekmi uz indeksa lielumu.

Piemēram, produkcijas fiziskā apjoma

- bāzes indeksu sistēma ar pastāvīgiem svariem p_0 ir šāda:

$$\frac{\sum q_1p_0}{\sum q_0p_0};\frac{\sum q_2p_0}{\sum q_0p_0};\ldots;\frac{\sum q_np_0}{\sum q_0p_0};$$

- ķēdes indeksu sistēma ar pastāvīgiem svariem p_0 ir šāda:

$$\frac{\sum q_1p_0}{\sum q_0p_0};\frac{\sum q_2p_0}{\sum q_1p_0};\ldots.\frac{\sum q_np_0}{\sum q_{n-1}p_0}.$$

Indeksu sistēma ar mainīgiem svariem ir kopindeksu sistēma, kur katrs nākamais indekss ir svērts ar kāda cita perioda svariem.

Mainīgie svari ir pārskata perioda svari. Jāņem vērā, ka tajos mainās tikai svaru periods, bet svaru saturs nemainās. Viena indeksa ietvaros skaitītājā un saucējā svari ir vienādi.

Piemēram,

- cenu bāzes indeksu sistēma ar mainīgiem svariem q ir šāda:

$$\frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1};\frac{\sum p_2q_2}{\sum p_0q_2};\ldots;\frac{\sum p_nq_n}{\sum p_0q_n};$$

- cenu ķēdes indeksu sistēma ar mainīgiem svariem q ir šāda:

$$\frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1};\frac{\sum p_2q_2}{\sum p_1q_2};\ldots;\frac{\sum p_nq_n}{\sum p_{n-1}q_n}.$$

Indeksu sistēmās ar mainīgiem svariem atsevišķus indeksus izmanto, lai pārskata perioda vērtības rādītājus pārrēķinātu iepriekšējā perioda cenās.

Reizinot ķēdes indeksus ar pastāvīgajiem svariem (izņemot vērtības indeksus), iegūst bāzes indeksus.

Dalot bāzes indeksus ar pastāvīgajiem svariem (izņemot vērtības indeksus), var aprēķināt ķēdes indeksus.

Indeksu sistēmas izvēle ir atkarīga no analīzes uzdevumiem.

Ja parādības pārmaiņas jāpēta ilgstošā laika periodā, tad lieto bāzes indeksu sistēmu; ja jāpēta īslaicīgas pārmaiņas, lieto ķēdes indeksu sistēmu.

Savukārt mainīgu svaru indeksi reālāk nekā pastāvīgo svaru indeksi atspoguļo pētāmās parādības pārmaiņu saturu, jo tajos lieto pārskata perioda svarus, kas atbilst faktiskajam parādības stāvoklim.

Tā kā pastāvīgo svaru indeksiem šo īpašību nav, tad rādītāji, ja svari ilgu laiku paliek nemainīgi, noveco un tos nevar izmantot korektai analīzei.

9.6. Laspeiresa, Paašē un Fišera ideālais indekss

Visus indeksus var iedalīt divās grupās:

- indeksi, kurus aprēķina, izmantojot bāzes perioda svarus (Laspeiresa formula);
- indeksi, kurus aprēķina, izmantojot pārskata perioda svarus (Paašē formulas).

Laspeiresa un Paašē cenu un fiziskā apjoma indeksu lielumi ir atšķirīgi. Lielumu atšķirības ir izskaidrojamas ar indeksu atšķirīgo ekonomisko saturu.

Viens no biežāk lietotajiem cenu indeksiem ir patēriņa cenu indeksi (PCI), kas atspoguļo patēriņa preču un pakalpojumu atlases fiksēta kopuma (patēriņa groza) vērtības izmaiņu pārskata periodā attiecībā pret bāzu periodu. PCI aprēķināšanai izmanto Laspeiresa tipa formulu:

$$I = \sum \frac{P_1}{P_0} W_0,$$

kur I – patēriņa cenu indekss;

P_1 un P_0 – patēriņa grozā pārstāvētās preces vienības cena pārskata un bāzes periodā;

W_0 – preces relatīvie svari jeb patēriņa grozā pārstāvēto preču īpatsvars kopējos iedzīvotāju izdevumos bāzes gadā.

Tā kā Laspeiresa indeksa aprēķinā tiek izmantoti bāzes perioda svari (p_0), tad tie paliek nemainīgi zināmu laika periodu (vairākus gadus).

Paašē cenu kopindekss rāda, par cik procentiem preces pārskata periodā kļuvušas dārgākas (lētākas) nekā bāzes periodā:

$$I_p = \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_1 p_0}.$$

Cenu indeksu Paašē indeksa formā makroekonomiskajā analīzē sauc par iekšzemes kopprodukta deflatoru.

Indeksi–deflatori parāda attiecību starp produkcijas vērtību faktiskajās cenās pārskata periodā un tās vērtību bāzes perioda cenās.

Deflatoru izmanto pārskata perioda kopprodukta pārrēķināšanai salīdzināmās cenās. Deflators rāda, kāda ir kopējā cenu dinamika, bet neraksturo inflācijas līmeni, jo iedzīvotājus vairāk skar to preču un produktu cenu izmaiņas, kurus tie regulāri patērē ikdienā.

Lai aprēķinātu Paašē cenu indeksu, izmantojot pārskata perioda svarus (p_1), katru mēnesi (ceturksni, gadu) jāsavāc un jāapkopo ievērojams informācijas apjoms, kas ir saistīts ar lielu darba, materiālu un darbaspēka resursu patēriņu.

Ņemot par pamatu šos divus cenu kopindeksu veidošanas variantus, amerikāņu ekonomists I. Fišers piedāvāja aprēķināt ģeometrisko vidējo no diviem agregātindeksiem, nosaucot savu metodi par ideālo formulu.

Fišera cenu indekss ir vienāds ar kvadrātsakni no Laspeiresa un Paašē cenu indeksa reizinājuma. Izmantojot iepriekš aprēķinātos Laspeiresa un Paašē cenu indeksus, var aprēķināt Fišera cenu indeksu:

$$I_p = \sqrt{\frac{\sum q_0 p_1}{\sum q_0 p_0} \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_1 p_0}} = \sqrt{1{,}094 \cdot 1{,}087} = \sqrt{1{,}189} = 109{,}0\ \%.$$

I. Fišers piedāvāja aprēķināt arī fiziskā apjoma kopindeksu kā kvadrātsakni no Laspeiresa un Paašē fiziskā apjoma indeksu reizinājumiem:

$$I_q = \sqrt{\frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0} \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_0 p_1}} = \sqrt{0{,}945 \cdot 0{,}939} = \sqrt{0{,}887} = 94{,}2\ \%.$$

Indeksu ģeometriskā vidējā formai ir ievērojams trūkums – tai nav konkrēta ekonomiska satura.

Laspeiresa un Paašē kopindeksu skaitītāja un saucēja starpība parāda reālu ekonomiju vai zaudējumus produkcijas fiziskā apjoma vai cenu pārmaiņu rezultātā; Fišera kopindekss to neparāda, un tā starpībai nav konkrēta ekonomiskā satura.

Fišera formulas ideālums vispirms izpaužas tādējādi, ka indekss ir apgriežams laikā, un tas ir sākotnējā indeksa apgrieztais lielums.

Piemēram, cenu indekss ir $i_p = \frac{p_1}{p_0}$; apgrieztais indekss ir $\frac{1}{i_p} = \frac{p_0}{p_1}$.

Šo divu indeksu reizinājums ir vienāds ar 1:

$$\frac{p_1}{p_0} \cdot \frac{p_0}{p_1} = 1.$$

Šim noteikumam atbilst Fišera ideālais indekss:

$$\frac{\sum q_0 p_1}{\sum q_0 p_0} \cdot \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_1 p_0} \cdot \frac{\sum q_0 p_0}{\sum q_0 p_1} \cdot \frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_1 p_1} = 1.$$

Fišera indeksu visbiežāk lieto, lai aprēķinātu cenu indeksus ilgākam laika periodam un izlīdzinātu produkcijas apjoma sastāva un struktūras tendences, kuras būtiski izmainās. Praksē tas notiek reti.

9.7. Vidējo lielumu indeksi

Viens no konkrētiem indeksu metodes lietošanas gadījumiem faktoru analīzē ir ekstensīvo un intensīvo faktoru ietekmes un pētāmās kopas struktūras pārmaiņu ietekmes izzināšana.

Parādības līmenis, kā zināms, izpaužas vidējā lieluma veidā.

Savukārt vidējais lielums ir atkarīgs no varianšu lielumiem un no varianšu biežuma struktūras.

Laika gaitā objektīvas varianšu un kopas struktūras pārmaiņas notiek reizē. Tā rezultātā mainās arī parādības līmeni izteicošais vidējais lielums.

Statistikas uzdevums ir analizēt un raksturot abu šo faktoru – varianšu skaitlisko lielumu un kopas struktūras pārmaiņu – ietekmi uz parādības līmeņa maiņu. To var noskaidrot ar indeksu metodi, izveidojot īpašu savstarpēji saistītu analītisku intensīvā faktora indeksu sistēmu, kurā ietilpst:

- mainīgā sastāva indekss,
- pastāvīgā sastāva indekss,
- struktūras pārmaiņu ietekmes indekss.

Šajā indeksu sistēmā izmanto tos pašus rādītāju simboliskos apzīmējumus, kurus lieto, aprēķinot vidējos lielumus:

x – pētāmās (indeksējamās) parādības variantšu skaitliskās nozīmes;

f – variantšu absolūtie biežumi;

w – variantšu relatīvie biežumi.

Mainīgā sastāva indekss izsaka pētāmās parādības vidējo līmeņu attiecību un raksturo vidējā līmeņa kopējās faktiskās pārmaiņas pārskata periodā salīdzinājumā ar bāzes periodu:

$$I_{\bar{x}(\text{m.s.})} = \frac{\sum x_1 f_1}{\sum f_1} : \frac{\sum x_0 f_0}{\sum f_0} = \frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_0}.$$

Pētāmās parādības vidējā līmeņa absolūto pieaugumu aprēķina šādi:

$$\Delta\bar{x} = \bar{x}_1 - \bar{x}_0.$$

Ja aprēķinos izmanto variantšu relatīvos biežumus, tad mainīgā sastāva indeksa formula ir:

$$I_{\bar{x}(\text{m.s.})} = \frac{\sum x_1 w_1}{\sum x_0 w_0}.$$

Šajā indeksā vienlaikus tiek uztverta abu faktoru ietekme, kas veido vidējā lieluma dinamiku:

- varianšu *x* skaitliskās nozīmes,
- struktūras pārmaiņas (īpatsvari kopējā skaitā).

Pastāvīgā (fiksētā sastāva) indekss rāda tikai viena faktora – indeksējamās parādības – varianšu *x* skaitlisko nozīmju pārmaiņas. Tas aprēķināts ar nemainīgiem (fiksētiem) svariem. Kopas struktūra abos periodos (bāzes un pārskata periodā) ņemta vienāda:

$$I_{x(\text{p.s.})} = \frac{\sum x_1 f_1}{\sum f_1} : \frac{\sum x_0 f_1}{\sum f_1} = \frac{\sum x_1 f_1}{\sum x_0 f_1} = \frac{\overline{x}_1}{\overline{x}_{0(1)}}.$$

Pētāmās parādības vidējā līmeņa absolūto pieaugumu tikai indeksējamās parādības lieluma pārmaiņu rezultātā aprēķina šādi:

$$\Delta\overline{x} = \overline{x}_1 - \overline{x}_{0(1)}.$$

Ja aprēķinos izmanto varianšu relatīvos biežumus, pastāvīgā sastāva indeksu aprēķina pēc formulas:

$$I_{x(\text{p.s.})} = \frac{\sum x_1 w_1}{\sum x_0 w_1}.$$

Pastāvīgā sastāva indekss rāda, par cik palielinājies vai samazinājies pētāmās parādības vidējais līmenis jo mainījušās indeksējamās parādības varianšu skaitliskās nozīmes.

Struktūras pārmaiņu ietekmes indekss raksturo pētāmās parādības struktūras pārmaiņas ietekmi uz parādības vidējā līmeņa dinamiku.

Indekss uztver tikai viena faktora – kopas struktūras – pārmaiņas pārskata periodā, salīdzinot ar bāzes periodu:

$$I_{x(\text{str.})} = \frac{\sum x_0 f_1}{\sum f_1} : \frac{\sum x_0 f_0}{\sum f_0} = \overline{x}_{0(1)} - \overline{x}_0.$$

Absolūto pieaugumu aprēķina šādi:

$$\Delta(\overline{x})f = \overline{x}_{0(1)} - \overline{x}_0.$$

Ja indeksu aprēķinu veic pēc varianšu relatīvajiem biežumiem, tad struktūras pārmaiņu ietekmes indeksu aprēķina pēc formulas:

$$I_{x(\text{str.})} = \frac{\sum x_0 w_1}{\sum x_0 w_0}.$$

Katrs no šiem indeksiem risina konkrētu analīzes uzdevumu, un indeksi ir arī savstarpēji saistīti:

$$\boxed{\textit{mainīgā sastāva indekss}} = \boxed{\textit{pastāvīgā sastāva indekss}} \cdot \boxed{\textit{struktūras pārmaiņu ietekmes indekss}}$$

$$I_{\overline{x}(\text{m.s.})} = I_{\overline{x}(\text{p.s.})} \cdot I_{x(\text{str.})}.$$

Savstarpēji saistīti ir arī absolūtie pieaugumi:

$$\Delta x = \Delta\bar{x}(x) + \Delta\bar{x}(f).$$

Piemērs.

Mēneša bruto darba samaksa un strādājošo skaits nozares divos uzņēmumos

Uzņēmumi	Mēneša darba samaksa, EUR		Strādājošo skaits		Darba samaksas fonds, EUR		
	bāzes mēnesis	pārskata mēnesis	bāzes mēnesis	pārskata mēnesis	bāzes mēnesis	pārskata mēnesis	d_0T_1
	d_0	d_1	T_0	T_1	d_0T_0	d_1T_1	
Pirmais	595	624	190	176	113 050	109 824	104 720
Otrais	672	707	86	90	57 792	63 630	51 480
Kopā			276	266	170 842	173 454	156 200

Mēneša vidējā darba samaksa nozarē, tās dinamika un absolūtais pieaugums:

$$I_{\bar{d}(\text{m.s})} = \frac{\sum d_1T_1}{\sum T_1} : \frac{\sum d_0T_0}{\sum T_0} =$$

$$= \frac{173454}{266} : \frac{170842}{276} = 652{,}08 : 618{,}99 = 1{,}053 \cdot 100 = 105{,}3\ \%;$$

$$\Delta_{\bar{d}} = 652{,}08 - 618{,}99 = 33{,}09\ \text{EUR}.$$

Mēneša vidējā darba samaksa nozarē paaugstinājusies par 5,3 % (105,3 % – 100,0 %) jeb par 33,09 EUR.

Pastāvīgā sastāva indekss atspoguļo tikai viena faktora – darba samaksas – izmaiņu ietekmi uz mēneša vidējo darba samaksu:

$$I_{d(\text{p.s})} = \frac{\sum d_1T_1}{\sum T_1} : \frac{\sum d_0T_1}{\sum T_1} =$$

$$= \frac{173454}{266} : \frac{156200}{266} = 652{,}08 / 587{,}22 = 1{,}110 \cdot 100 = 111{,}0\ \%;$$

$$\Delta_d = 652{,}08 - 587{,}22 = 64{,}86\ \text{EUR}.$$

Nodarbināto darba samaksas paaugstināšanās rezultātā mēneša vidējā darba samaksa nozarē paaugstinājusies par 11,0 % (111,0 % – 100,0 %) jeb par 64,86 EUR.

Lai noteiktu otra faktora – nodarbināto struktūras – pārmaiņu ietekmi uz mēneša vidējās darba samaksas izmaiņu, jāaprēķina struktūras pārmaiņas ietekmes indekss un absolūtais pieaugums:

$$I_{d(\text{str.})} = \frac{\sum d_0 T_1}{\sum T_1} : \frac{\sum d_0 T_0}{\sum T_0} =$$

$$= \frac{156200}{266} : \frac{170842}{276} = 587{,}22 : 618{,}99 = 0{,}949 \cdot 100 = 94{,}9\ \%;$$

$$\Delta_{d(\text{str.})} = 587{,}22 - 618{,}99 = -31{,}77 \text{ EUR}.$$

Nodarbināto struktūras izmaiņas rezultātā mēneša vidējā darba samaksa nozarē samazinājusies par 5,1 % (94,9 % – 100 %) jeb par 31,77 EUR.

Aprēķināto indeksu savstarpējā saistība:

$$I_{\bar{d}(\text{m.s})} = I_{d(\text{p.s})} \cdot I_{d(\text{str.})}; \quad 1{,}053 = 1{,}110 \cdot 0{,}949.$$

Aprēķināto absolūto pieaugumu savstarpējā saistība:

$$\Delta_{\bar{d}(\text{m.s})} = \Delta_{\bar{d}(\text{p.s})} + \Delta_{\bar{d}(\text{str})}; \quad 33{,}09 \text{ EUR} = 64{,}86 \text{ EUR} - 31{,}77 \text{ EUR}.$$

Atsevišķu ekonomisko parādību kopindeksi

Indeksa nosaukums	Mainīgā sastāva kopindekss	Pastāvīgā sastāva kopindekss	Struktūras pārmaiņu ietekmes kopindekss
Cenu kopindeksi	$I_{\bar{p}(\text{m.s.})} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum q_1} : \frac{\sum p_0 q_0}{\sum q_0}$	$I_{p(\text{p.s.})} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum q_1} : \frac{\sum p_0 q_1}{\sum q_1} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1}$	$I_{p(\text{str.})} = \frac{\sum p_0 q_1}{\sum q_1} : \frac{\sum p_0 q_0}{\sum q_0}$
Produkcijas pašiz-maksas kopindeksi	$I_{\bar{z}(\text{m.s.})} = \frac{\sum z_1 q_1}{\sum q_1} : \frac{\sum z_0 q_0}{\sum q_0}$	$I_{z(\text{p.s.})} = \frac{\sum z_1 q_1}{\sum q_1} : \frac{\sum z_0 q_1}{\sum q_1} = \frac{\sum z_1 q_1}{\sum z_0 q_1}$	$I_{z(\text{str.})} = \frac{\sum z_0 q_1}{\sum q_1} : \frac{\sum z_0 q_0}{\sum q_0}$
Darba samaksas kopindeksi	$I_{\bar{d}(\text{m.s.})} = \frac{\sum d_1 T_1}{\sum T_1} : \frac{\sum d_0 T_0}{\sum T_0}$	$I_{d(\text{p.s.})} = \frac{\sum d_1 T_1}{\sum T_1} : \frac{\sum d_0 T_1}{\sum T_1} = \frac{\sum d_1 T_1}{\sum d_0 T_1}$	$I_{d(\text{str.})} = \frac{\sum d_0 T_1}{\sum T_1} : \frac{\sum d_0 T_0}{\sum T_0}$
Ražības kopindeksi	$I_{\bar{r}(\text{m.s.})} = \frac{\sum r_1 P_1}{\sum P_1} : \frac{\sum r_0 P_0}{\sum P_0}$	$I_{r(\text{p.s.})} = \frac{\sum r_1 P_1}{\sum P_1} : \frac{\sum r_0 P_1}{\sum P_1} = \frac{\sum r_1 P_1}{\sum r_0 P_1}$	$I_{r(\text{str.})} = \frac{\sum r_0 P_1}{\sum P_1} : \frac{\sum r_0 P_0}{\sum P_0}$

9.8. Teritoriālie indeksi

Mūsdienu apstākļos arvien lielāku nozīmi iegūst indeksu metodes lietošana teritoriālos salīdzinājumos. Indeksu metodi plaši izmanto starptautiskajā statistikā, lai salīdzinātu atsevišķu valstu sociālekonomiskās attīstības rādītājus.

Reģionālo indeksu specifika saistīta ar salīdzinājuma bāzes izvēli. Divpusējā salīdzināšanā katrs reģions (teritorija) var kalpot gan par salīdzināšanas bāzi, gan arī par salīdzināmo. Turklāt, lai aprēķinātu kopindeksus, ir jāatrisina jautājums par indeksējamo lielumu svariem.

Aplūkosim šos jautājumus piemērā par produkcijas realizāciju pārskata periodā divās pilsētās.

Produkcijas realizācija divās pilsētās (nosacīti dati)

Produkcijas veidi	K pilsēta		M pilsēta		Individuālie cenu indeksi	
	cena, EUR	daudzums, tūkst. gab.	cena, EUR	daudzums, tūkst. gab.	$Ip_{K/M} = \frac{p_k}{p_m}$	$Ip_{M/K} = \frac{p_m}{p_k}$
	p_k	q_k	p_k	q_k		
A	15	30	22	40	0,68	1,47
B	60	18	56	20	1,07	0,93
C	180	55	200	35	0,90	1,11

Lai noteiktu realizētās produkcijas cenu līmeņu attiecības K pilsētā un M pilsētā, jāaprēķina cenu kopindeksi, kuros par indeksējamo elementu p_k un p_m svariem izmanto realizēto preču apjomu gan K pilsētā, gan arī M pilsētā. Vispirms jāaprēķina cenu līmeņu attiecības K pilsētā salīdzinājumā ar M pilsētu. Cenu kopindeksa formula būs šāda:

$$Ip_{K/M} = \frac{\sum q_k p_k}{\sum q_k p_m} = \frac{30 \cdot 15 + 60 \cdot 18 + 55 \cdot 180}{30 \cdot 22 + 18 \cdot 56 + 55 \cdot 200} = \frac{11\,430}{12\,668} = 90{,}2\ \%.$$

Formulas skaitītājs $\sum q_k p_k$ raksturo realizētās produkcijas apjomu K pilsētā par tur esošajām cenām. Saucējs $\sum q_k p_m$ raksturo nosacītu realizācijas ieņēmumu apjomu, ja attiecīgais produkcijas sortiments būtu realizēts par cenām, kādas pastāv M pilsētā.

Iegūtais rezultāts 90,2 % liecina: ja dotais produkcijas sortiments tiktu realizēts par M pilsētā esošajām cenām, tad to līmenis būtu vidēji par 9,8 % zemāks nekā cenu līmenis K pilsētā.

Starpība starp skaitītāju un saucēju $\sum p_k q_k - \sum p_k q_m$ raksturo iegūtā ekonomiskā efekta summu no abu pilsētu cenu atšķirībām. Mūsu piemērā tā ir $11430 - 168 = 1238$ tūkst. EUR. Tas nozīmē, ka, realizējot produkciju par M pilsētā esošajām cenām, ieņēmumi no realizācijas būtu par 1238 tūkst. EUR mazāki nekā faktiskie ieņēmumi K pilsētā.

Ir iespējama arī citāda analīzes nostādne: noteikt cenu līmeņu attiecības, salīdzinot realizētās produkcijas cenu M pilsētā ar K pilsētā realizētās produkcijas cenu. Lai noteiktu cenu kopindeksu, par indeksējamo lielumu svariem izmanto realizēto preču daudzumus M pilsētā (q_{m}):

$$Ip_{\mathrm{M/K}} = \frac{\sum q_{\mathrm{m}} p_{\mathrm{m}}}{\sum q_{\mathrm{m}} p_{\mathrm{k}}}.$$

Formulā skaitītājs $\sum p_{\mathrm{m}} q_{\mathrm{m}}$ raksturo faktisko realizācijas apjomu M pilsētā pēc tur esošajām cenām, bet saucējs $\sum p_{\mathrm{m}} q_{\mathrm{k}}$ raksturo nosacīto realizācijas apjomu, kāds izveidotos, ja doto preču sortimentu realizētu par K pilsētā pastāvošajām cenām:

$$Ip_{\mathrm{M/K}} = \frac{40 \cdot 22 + 20 \cdot 56 + 35 \cdot 200}{40 \cdot 15 + 20 \cdot 60 + 35 \cdot 180} = \frac{9000}{8100} = 111{,}1\,\%.$$

Realizējot M pilsētas produkciju par K pilsētā pastāvošajām cenām, to līmenis vidēji paaugstinātos par 11,1 %. Absolūtajā izteiksmē tas būtu 900 tūkst. EUR (9000 − 8100).

Kā redzams, individuālie cenu indeksi atšķiras no kopindeksiem. Lai novērstu pretrunas starp individuālajiem cenu indeksiem, aprēķina cenu indeksu, par samērotāju lietojot realizētās produkcijas summu abās pilsētās (q):

$$q = q_{\mathrm{k}} + q_{\mathrm{m}}.$$

Cenu kopindeksa formula, analizējot cenu pārmaiņas K pilsētā salīdzinājumā ar M pilsētu, ir:

$$Ip_{\mathrm{K/M}} = \frac{\sum q p_{\mathrm{k}}}{\sum q p_{\mathrm{m}}};$$

$$Ip_{\mathrm{K/M}} = \frac{(30+40)15 + (18+20)60 + (55+35)180}{(30+40)22 + (18+20)56 + (55+35)200} = \frac{19\,530}{21\,668} = 90{,}1\,\%.$$

Tas nozīmē, ka cenas K pilsētā, salīdzinot ar M pilsētu, ir zemākas par 9,9 %.

Aprēķināsim arī apgriezto indeksu, t. i., cenu pārmaiņas M pilsētā, salīdzinot ar K pilsētu:

$$Ip_{\mathrm{M/K}} = \frac{\sum q p_{\mathrm{m}}}{\sum q p_{\mathrm{k}}};$$

$$Ip_{\mathrm{M/K}} = \frac{70 \cdot 22 + 38 \cdot 56 + 90 \cdot 200}{70 \cdot 15 + 38 \cdot 60 + 90 \cdot 180} = \frac{21\,668}{19\,530} = 110{,}9\,\%.$$

Cenas M pilsētā realizētās produkcijas sortimentam ir vidēji par 10,9 % augstākas nekā K pilsētā.

Teritoriālos fiziskā apjoma kopindeksos par samērotājiem var lietot vidējās cenas ($\overline{p}$):

$$Iq_{K/M} = \frac{\sum q_k \bar{p}}{\sum q_m \bar{p}}.$$

Teritoriju (reģionu) vidējās cenas aprēķina pēc svērtā aritmētiskā formulas. Vidējās cenas attiecīgajiem produkcijas veidiem A, B, C būs:

$$\bar{p}_A = \frac{30 \cdot 15 + 40 \cdot 22}{30 + 40} = 19{,}00 \text{ EUR},$$

$$\bar{p}_B = \frac{18 \cdot 60 + 20 \cdot 56}{18 + 20} = 57{,}89 \text{ EUR},$$

$$\bar{p}_C = \frac{55 \cdot 180 + 35 \cdot 200}{55 + 35} = 187{,}78 \text{ EUR}.$$

K pilsētā produkcijas realizācijas fiziskā apjoma kopindekss salīdzinājumā ar M pilsētu būs:

$$Iq_{K/M} = \frac{30 \cdot 19{,}0 + 18 \cdot 57{,}89 + 55 \cdot 187{,}78}{40 \cdot 19{,}0 + 20 \cdot 57{,}89 + 35 \cdot 187{,}78} = 11\,939{,}9 = 140{,}6\ \%.$$

Tātad kopējais realizācijas apjoms K pilsētā vidēji ir par 40,6 % lielāks nekā M pilsētā. Lai noteiktu apgriezto fiziskā apjoma kopindeksu, izmanto formulu:

$$Iq_{M/K} = \frac{\sum q_m \bar{p}}{\sum q_k \bar{p}};$$

$$Iq_{M/K} = \frac{40 \cdot 17 + 20 \cdot 57{,}89 + 35 \cdot 187{,}78}{30 \cdot 17 + 18 \cdot 57{,}89 + 55 \cdot 187{,}78} = \frac{8490{,}1}{11939{,}9} = 71{,}1\ \%,$$

t. i., kopējais realizācijas apjoms M pilsētā, salīdzinot ar K pilsētu, vidēji ir par 28,9 % mazāks.

Pārbaudes jautājumi

1. Kas ir indeksi statistikā, un kāpēc tos izmanto?
2. Kā klasificē indeksus?
3. Ko raksturo individuālie indeksi?
4. Kad izmanto kopindeksus, un kādi elementi tos veido?
5. Kad izmanto bāzes indeksu sistēmu, bet kad – ķēdes indeksu sistēmu?
6. Ar ko atšķiras Laspeiresa un Paašē indeksi, un kāds ir to lietojums?
7. Kad izmanto Fišera indeksu?
8. Paskaidrojiet, kāpēc jāaprēķina vidējo lielumu indeksi?
9. Kāpēc mūsdienu pētījumos arvien vairāk izmanto teritoriālos indeksus?

Uzdevumi

1. uzdevums. Ražotās eksportprodukcijas apjomi un cenas uzņēmumā (nosacīti dati).

Preces veids	Ražotais daudzums, tūkst. gab.		Viena izstrādājuma cena, EUR	
	bāzes gadā	pārskata gadā	bāzes gadā	pārskata gadā
A	40	64	20	25
B	75	50	230	210
C	120	136	80	90

Aprēķināt:

1) atsevišķiem ražotajiem eksportprodukcijas veidiem:
   a) fiziskā apjoma individuālos indeksus (skaitļa "1" daļās ar trīs zīmēm aiz komata),
   b) cenu individuālos indeksus (skaitļa "1" daļās ar trīs zīmēm aiz komata),
   c) ražotās eksportprodukcijas vērtību bāzes un pārskata gadā,
   d) eksportprodukcijas vērtības individuālos indeksus (skaitļa "1" daļās ar trīs zīmēm aiz komata),
   e) parādīt aprēķināto individuālo indeksu savstarpējo saistību;
2) kopā par visiem eksportprodukcijas veidiem:
   a) preču vērtības kopindeksu procentos,
   b) fiziskā apjoma kopindeksu (pēc Laspeiresa formulas) procentos,
   c) cenu kopindeksu (pēc Paašē formulas) procentos,
   d) parādīt aprēķināto kopindeksu savstarpējo saistību;
3) kopējo naudas ieņēmumu absolūto pieaugumu no eksportprodukcijas ražošanas pārskata gadā salīdzinājumā ar bāzes gadu:
   a) fiziskā apjoma izmaiņu rezultātā,
   b) cenu izmaiņu rezultātā;
4) kopā par visiem eksportprodukcijas veidiem:
   a) fiziskā apjoma kopindeksu (pēc Paašē formulas) procentos,
   b) cenu kopindeksu (pēc Laspeiresa formulas) procentos,
   c) fiziskā apjoma kopindeksu (pēc Fišera formulas) procentos,
   d) cenu kopindeksu (pēc Fišera formulas) procentos.

2. uzdevums. N uzņēmumā saražotās keramikas produkcijas apjoms bāzes gadā un tās fiziskā apjoma un cenu pārmaiņas pārskata gadā salīdzinājumā ar bāzes gadu (nosacīti dati).

Produkcijas veidi	Produkcijas apjoms bāzes gadā, tūkst. EUR	Fiziskā apjoma pieaugums vai samazinājums (–), %	Cenu pieaugums vai samazinājums (–), %
Puķu vāzes	12,0	–1,6	2,9
Svečturi	27,0	8,0	–2,0
Sienas dekori	19,0	–3,1	5,5
Kopā	58,0		

Aprēķināt:

1) atsevišķiem ražotās produkcijas veidiem:
   a) fiziskā apjoma individuālos indeksus (skaitļa "1" daļās),
   b) cenu individuālos indeksus (skaitļa "1" daļās),
   c) pārskata gadā ražotās produkcijas apjomu bāzes gada cenās,
   d) bāzes gadā ražotās produkcijas apjomu pārskata gada cenās,
   e) pārskata gadā ražotās produkcijas apjomu;
2) kopā par visiem ražotās produkcijas veidiem:
   a) ražotās produkcijas apjoma kopindeksu procentos,
   b) fiziskā apjoma kopindeksu (pēc Laspeiresa formulas) procentos,
   c) cenu kopindeksu (pēc Paašē formulas) procentos,
   d) parādīt aprēķināto kopindeksu savstarpējo saistību.

10. Varbūtības teorija

10.1. Varbūtības teorijas pamatjēdzieni

Varbūtības teorija noskaidro un pēta dažādas likumsakarības, kurām ir pakļauti gadījuma notikumi un gadījuma lielumi.

Varbūtības teorija ir matemātikas nozare, kas izstrādā abstraktu gadījuma notikumu pētīšanas vispārējās metodes.

Notikums ir jebkurš fakts, kuru var konstatēt novērojuma vai izmēģinājuma rezultātā. Par novērojumu vai izmēģinājumu sauc noteiktu apstākļu realizāciju, kuras rezultātā notikums var iestāties (realizēties).

Izmēģinājums nozīmē, ka minētais apstākļu komplekss tiek radīts apzināti. Novērojuma gaitā novērotājs pats šo apstākļu kompleksu nerada un neietekmē. To rada vai nu dabas spēki, vai citi cilvēki.

Visus notikumus, kādus cilvēki novēro un paši izraisa, var iedalīt:

- droši sagaidāmos notikumos;
- neiespējamos notikumos;
- gadījuma (nejaušos) notikumos.

Droši sagaidāms notikums iestājas vienmēr, ja ir izveidojusies noteikta apstākļu kopa. Piemēram, ja strādājam, tad saņemam par to atlīdzību; ja esam nokārtojuši eksāmenus un izturējuši konkursu, tad varam rēķināties, ka esam iekļauti studentu skaitā. Droši sagaidāmus notikumus var novērot fizikā un ķīmijā. Ekonomikā droši sagaidāmie notikumi ir saistīti ar pastāvošo sabiedrisko iekārtu un likumdošanu. Tā, piemēram, ja esam noguldījuši naudu bankā depozīta kontā un noteiktā laikā izteikuši vēlēšanos to saņemt, naudu arī saņemsim. Ar to var rēķināties kā ar droši sagaidāmu notikumu.

Neiespējami notikumi noteikti nenotiek, ja ir izveidojusies noteikta apstākļu kopa. Piemēram, ūdens nesasalst, ja temperatūra ir 15 °C, ražošana nenotiek bez elektroenerģijas utt.

Gadījuma noteikumi, realizējoties noteiktai apstākļu kopai, var iestāties un var neiestāties. Piemēram, vienreiz metot monētu, var uzkrist ģerbonis un var arī neuzkrist, loterijas biļete var būt ar laimestu vai bez tā, ražotais izstrādājums var būt derīgs un var būt arī brāķis. Brāķa rašanās ir gadījuma notikums, daudz retāks nekā derīgu izstrādājumu ražošana. Tātad noteiktos apstākļos viens gadījuma notikums var iestāties samērā reti, piemēram, laimēt ceļojumu apkārt pasaulei, uzminēt visus laimējušos skaitļus loterijā, cits turpretī bieži – izgatavot derīgus izstrādājumus, atbildēt uz visiem eksāmena jautājumiem utt.

Gadījuma notikumu iestāšanās sagaidāmais biežums ir cieši saistīts ar varbūtības jēdzienu. Gadījuma notikumu iestāšanās un neiestāšanās likumsakarības pēta varbūtības teorija.

Varbūtības teorija kā matemātiska zinātne radās 16.–17. gs. Pirmie gadījuma notikumi, kas pievērsa matemātiķu uzmanību pirms vairāk nekā 300 gadiem, bija saistīti ar azartspēlēm. Nekur citur varbūtības teorijas nelieto tik plaši kā azartspēlēs.

Ja vajadzīgo apstākļu kompleksu realizē tikai vienu reizi, tad iegūst maz informācijas par gadījuma notikumu, jo tas var notikt, kā arī nenotikt. Ja apstākļu kompleksu realizē daudz reižu, tad jau parādās zināmas likumsakarības. Piemēram, nekad nevar zināt, kādu kafijas aparātu veikalā pieprasīs kārtējais pircējs, bet, ja ir zināmas ilgākā laikā pieprasītāko kafijas aparātu markas, tad ir iespējams organizēt ražošanu un sagādi, lai apmierinātu pieprasījumu.

Daudziem gadījuma notikumiem ir nejaušs raksturs. Piemēram, transporta negadījumi, ugunsgrēki, plūdi utt., bet tas nenozīmē, ka tie rodas bez cēloņa un nav pakļauti vispārējai parādību cēloņsakarībai.

Tātad, ja šo apstākļu kompleksu realizē bieži, tad arvien vairāk parādās zināmas likumsakarības un konkrētas **varbūtību likumsakarības**.

Likumsakarību zināšana, kurām pakļauti masveida gadījuma notikumi, ļauj paredzēt, kad šie notikumi iestāsies. Piemēram, kā jau iepriekš minēts, nevar paredzēt monētas mešanas rezultātus, bet, ja monētu metīs daudzas reizes, tad var paredzēt ģerboņa uzmešanu. Kļūda var būt neliela.

Varbūtības teorijas metodes plaši izmanto dažādās dabaszinātnes nozarēs, teorētiskajā fizikā, ģeodēzijā, astronomijā, automatizētās pārvaldes teorijā, novērošanas kļūdu teorijā un daudzās citās teorētiskajās un lietišķajās zinātnēs.

Varbūtības teoriju plaši izmanto ražošanas plānošanā un organizēšanā, produkcijas kvalitātes analīzē, tehnoloģisko procesu analīzē, apdrošināšanā, iedzīvotāju statistikā, bioloģijā, ballistikā u. c.

Gadījuma notikumus parasti apzīmē ar latīņu alfabēta lielajiem burtiem A, B, C utt.

Gadījuma notikumi var būt:

- nesavienojami gadījuma notikumi;
- savienojami gadījuma notikumi.

Notikumus A, B, C, ... sauc par **nesavienojamiem**, ja viena mēģinājuma rezultātā var iestāties viens no tiem, bet nav iespējama divu vai vairāku notikumu parādīšanās.

Ja viena gadījuma notikuma iestāšanās neizslēdz otra notikuma iestāšanos, tie ir **savienojami** notikumi. Piemēram, ja no konveijera lentes ņem kārtējo detaļu un A ir notikums “detaļa atbilst standartam”, bet B – notikums “detaļa neatbilst standartam”, tad A un B ir nesavienojami notikumi. Ja C notikumam ir “paņemta II šķiras detaļa”, tad šis notikums ir savienojams ar notikumu A, bet nav savienojams ar notikumu B.

Ja katrā novērojumā (izmēģinājumā) ir jānotiek vienam un tikai vienam no nesavienojamiem gadījuma notikumiem, tad šie notikumi veido **pilnu notikumu kopu (sistēmu)**.

Var teikt, ka **drošs notikums** ir kaut vai viena notikuma iestāšanās no pilnas notikuma kopas.

Ja notikumi, kuri veido pilnu notikuma kopu, **pa pāriem ir nesavienojami**, tad novērojuma rezultātā parādīsies **tikai viens** no šiem notikumiem. Šis atsevišķais notikums rada vislielāko interesi.

Piemēram, studentam kontroldarbā jāatrisina divi uzdevumi. Noteikti notiks viens un tikai viens no šādiem notikumiem:

- tiks atrisināts pirmais uzdevums un neatrisināts otrais;
- tiks atrisināts otrais uzdevums un neatrisināts pirmais;
- tiks atrisināti abi uzdevumi;
- netiks atrisināts neviens no uzdevumiem.

Šie notikumi veido nesavienojamu notikumu pilnu notikumu kopu.

Ja pilna notikumu kopa sastāv tikai no diviem nesavienojamiem notikumiem, tad tos sauc par **savstarpēji pretējiem** jeb **alternatīviem** notikumiem.

Ja notikumi A un B ir savstarpēji pretēji, tad notikumu B sauc par notikuma A **negāciju** un apzīmē ar simbolu Ā.

Piemēram, vienreiz metot monētu, var uzkrist cipars (A) vai ģerbonis (Ā).

Notikumus sauc arī par **vienādi iespējamiem**, ja nevienam no tiem nav objektīvu priekšrocību. Ja notikumi ir vienīgi iespējami, tie veido **pilnu notikumu grupu**. Tas nozīmē, ka novērojuma vai mēģinājuma rezultātā noteikti ir jāiestājas vismaz vienam no nesavienojamiem notikumiem.

Piemēram, pilnu notikumu grupu veido cipara un ģerboņa uzkrišana, vienreiz metot monētu; vienā nodrukātā teksta lappusē ir 0, 1, 2, 3 un vairāk nekā trīs drukas kļūdas.

10.2. Varbūtību definīcijas

Klasiskā varbūtības definīcija.

Zinātnes attīstības gaitā ir izstrādātas vairākas teorijas un metodes, kā vislabāk atklāt varbūtības jēdziena būtību.

Par **iespēju** jeb **labvēlīgu gadījumu** sauc gadījumu, kad, realizējoties noteiktam apstākļu kompleksam, notikumi A notiek. Klasiskā varbūtības definīcija paredz tieši saskatīt labvēlīgo gadījumu jeb iespēju skaitu.

Par notikuma **A varbūtību *P*(A)** sauc šim notikumam labvēlīgo iespēju skaita M attiecību pret visu vienlīdz iespējamo nesavienojamo notikumu skaitu N, kuri var rasties viena izmēģinājuma vai novērojuma rezultātā:

$$P(\mathrm{A}) = \frac{M}{N}.$$

Ja ir pilnīgi skaidrs, par kāda notikuma varbūtību ir runa, tad tā varbūtību apzīmē ar mazo burtu p, neuzrādot notikuma apzīmējumu.

Lai aprēķinātu varbūtību pēc klasiskās definīcijas, ir jāatrod visi vienādi iespējamie nesavienojamie notikumi, tie jāsaskaita un jānosaka, cik no tiem ir labvēlīgi notikuma A noteikšanai.

Piemēram, jāatrod varbūtība, ka, metot skaitļu kauliņu, uzmetīsim skaitli 5. Zināms, ka visām sešām skaldnēm pēc metiena ir vienāda iespēja palikt virspusē. Skaitlis 5 ir atzīmēts tikai uz vienas skaldnes. Tātad vienādi iespējamo nesavienojamo notikumu skaits ir 6 (seši), un no tiem ir tikai viena labvēlīga iespēja skaitļa 5 uzkrišanai ($M = 1$). Tas nozīmē, ka varbūtība uzmest ar spēļu kauliņu skaitli 5 ir:

$$P(5) = \frac{1}{6}.$$

Otrs piemērs. Kastītē ir trīs sarkanas un 12 baltas pēc izmēriem pilnīgi vienādas bumbiņas. Neskatoties tiek paņemta viena bumbiņa. Varbūtība, ka tiks paņemta sarkanā bumbiņa ir:

$$P(\mathrm{A}) = \frac{3}{15}.$$

Klasisko varbūtību sauc arī par **aprioro varbūtību**, jo to izrēķina pirms izmēģinājumu (novērojumu) uzsākšanas. No klasiskās varbūtības apriorā rakstura izriet tās galvenais trūkums: tikai retos gadījumos jau pirms novērojumu uzsākšanas var saskatīt visus vienādi iespējamos nesavienojamos notikumus un to skaitā labvēlīgos notikumus. Tādas iespējas parasti ir situācijās, kas radniecīgas spēlēm. Tādēļ klasiskās varbūtības aprēķinus var izmantot, organizējot dažādas loterijas un izlozes.

Varbūtību īpašības.

1. Ja var saskaitīt notikuma A rašanās iespējas un to skaits sakrīt ar kopējo vienīgi iespējamo nesavienojamo notikumu skaitu, tad šī A notikuma varbūtība ir viens. **Droši sagaidāma notikuma varbūtība ir viens**.

Piemēram, metot spēļu kauliņu un skaitot par A notikumu skaitļus 1, 2, 3, 4, 5, 6 izkrišanu, labvēlīgas iespējas ir seši. Seši ir arī vienīgi iespējamie nesavienojamie gadījumi. Tātad $M = N$ un

$$P(\mathrm{A}) = \frac{M}{N} = 1.$$

2. Neiespējama notikuma varbūtība ir 0. Ja notikuma A iespēju skaits ir nulle, tad arī

$$P(\mathrm{A}) = \frac{M}{N} = 0.$$

Piemēram, ar spēļu kauliņu nevar uzmest skaitli 9, jo šāda skaitļa uz kauliņa skaldnes nav.

3. Gadījuma notikuma varbūtība vienmēr ir lielāka par nulli un mazāka par vienu:

$$P(\mathrm{A}) = \frac{M}{N} < 1;$$

$$\text{un } P(\text{A}) = \frac{M}{N} > 0;$$
$$\text{vai } 0 < P(\text{A}) < 1.$$

Statistiskās varbūtības definīcija.

Statistiskā varbūtības definīcija izmanto notikuma A relatīvā biežuma jēdzienu. Par notikuma A relatīvo biežumu sauc tā novērojumu skaita, kuros A novērots, attiecību pret visu novērojumu skaitu. Relatīvo biežumu parasti apzīmē ar burtu *W*. Ja n novērojumos notikums A ir fiksēts m reizes, tad notikuma A relatīvais biežums

$$W(A) = \frac{m}{n}.$$

Piemēram, basketbolists pie soda līnijas gatavojas izdarīt metienu. No trenera uzkrātās statistiskās informācijas zināms, ka šim basketbolistam caurmērā no 100 soda metieniem veiksmīgi ir 70. Varbūtība, ka basketbolists realizēs soda metienu ir:

$$W(\text{A}) = \frac{70}{100} = 0{,}7.$$

Ilgi novērojumi ir pierādījuši, ka, palielinot novērojumu skaitu, notikuma A relatīvais biežums kļūst arvien stabilāks. Skaitli, ap kuru svārstās relatīvais biežums, atkārtoti izdarot novērojumu sērijas, sauc par notikuma A **statistisko varbūtību**.

Izmantojot robežas simbolu, var rakstīt, ka

$$W(\text{A}) = \frac{m}{n} \to P(\text{A}), \text{ ja } n \to \infty.$$

Aprēķināt precīzu statistisko varbūtību nevar, jo nav iespējams izvēlēties bezgalīgi lielu novērojumu skaitu.

Statistiskās varbūtības definīcijas priekšrocība ir tā, ka nav nepieciešamas apriorās zināšanas par pētāmo objektu. Klasisko varbūtību var aprēķināt pirms, bet statistisko – pēc novērojuma vai mēģinājuma.

10.3. Nesavienojamu notikumu varbūtību saskaitīšana

Darbības ar varbūtībām izdara tad, ja ir zināmas kādu notikumu varbūtības, bet jāaprēķina varbūtības citiem notikumiem, kuri ir saistīti ar konkrētajiem notikumiem.

Varbūtību saskaitīšanu lieto tad, ja ir jāaprēķina gadījuma notikumu apvienojuma vai loģiskās summas varbūtība.

Par **divu notikumu summu** sauc notikumu, kurš realizējas tad un tikai tad, ja iestājas vismaz viens no notikumiem. Notikumu A un B summu apzīmē $\text{A} + \text{B}$ jeb $\text{A} \cup \text{B}$, kur $\cup$ – apvienošanas zīme matemātikā, ko lasa ar vārdiem „vai”.

A + B ir notikums, kas iestājās tad un tikai tad, ja novērojumā ir iestājies notikums A vai notikums B, vai arī vienlaikus A un B.

Ja notikumi A un B ir savstarpēji nesavienojami un to varbūtības dotas, tad varbūtību, ka viena izmēģinājuma rezultātā notiks viens no šiem notikumiem, vienalga kurš, aprēķina, izmantojot varbūtību saskaitīšanu.

Varbūtība, ka iestāsies viens no diviem savstarpēji nesavienojamiem notikumiem, ir vienāda ar šo notikumu varbūtību summu:

$$P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B}).$$

Piemērs. Pīļu medībās izdarīti divi šāvieni. Notikums A – trāpīts ar pirmo šāvienu, notikums B – trāpīts ar otro šāvienu, bet notikums (A + B) – trāpīts ar pirmo šāvienu vai ar otro šāvienu, vai abiem šāvieniem. Tātad, ja divi notikumi A un B ir nesavienojami notikumi, tad A + B – notikums, ja iestājies vismaz viens no šiem notikumiem, vai arī abi notikumi.

Var saskaitīt tiklab klasiskās, kā arī statistiskās varbūtības.

Piemēram, kastītē ir 30 vienāda izmēra lodītes: 10 sarkanas, 5 zilas un 15 baltas. Kāda ir varbūtība paņemt krāsainu (ne baltu) lodīti?

Apzīmēsim ar A notikumu „paņemtā lodīte ir sarkana”, bet ar B – notikumu „paņemtā lodīte ir zila”. Tad $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ ir notikums „paņemtā lodīte ir krāsaina (nav balta)”. Notikumu A un B varbūtības ir

$$P(\mathrm{A}) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3},\ P(\mathrm{B}) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}.$$

Notikumi A un B ir savstarpēji nesavienojami, jo, ņemot vienu lodīti, nevar paņemt dažādu krāsu lodītes, tāpēc var izmantot varbūtību saskaitīšanu:

$$P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

Ja notikumi A_1, A_2, ... , A_n veido pilnu kopu, tad to varbūtību summa ir viens:

$$P(\mathrm{A}_1) + P(\mathrm{A}_2) + \ldots + P(\mathrm{A}_n) = 1.$$

Pretēju notikumu varbūtību summa ir viens.

$$P(\mathrm{A}) + P(\bar{\mathrm{A}}) = 1.$$

Pretēji notikumi veido pilnu notikumu kopu, bet pilnas kopas varbūtība ir viens. Pretēju notikumu varbūtības parasti apzīmē ar mazajiem burtiem p un q. Tad var rakstīt $p + q = 1$, no kā izriet, ka $p = 1 - q$ un $q = 1 - p$.

Piemēram, mērķim ir trīs zonas. Kāda šāvēja trāpījuma varbūtība ir I zonā – 0,15, II zonā – 0,23, III zonā – 0,17?

Varbūtība, ka sportists trāpīs mērķī, ir $p = 0{,}15 + 0{,}23 + 0{,}17 = 0{,}55$.

Varbūtība, ka sportists aizšaus garām, ir $q = 1 - 0{,}55 = 0{,}45$.

10.4. Varbūtību reizināšana

Varbūtību reizināšanu lieto, ja ir jāaprēķina gadījuma notikumu **loģiskā reizinājuma vai šķēluma varbūtība**.

Gadījuma notikumiem jābūt neatkarīgiem. Divus notikums sauc par savstarpēji neatkarīgiem, ja viena notikuma iestāšanās neietekmē otra notikuma notikšanas varbūtību.

Par divu notikumu A un B loģisku reizinājumu $A \cap B$ sauc notikumu, kuru saprot kā abu notikumu A un B kopēju iestāšanos.

Divu neatkarīgu notikumu A un B vienlaicīgas iestāšanās $A \cap B$ varbūtība P ir vienlīdzīga šo notikumu varbūtību reizinājumam:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

Piemēram, trīs reizes pēc kārtas tiek mesta monēta. Jāaprēķina varbūtība, ka visas trīs reizes uzkritīs ģerbonis.

Atrisinājums. Varbūtība, ka, pirmo reizi metot monētu, uzkritīs ģerbonis, ir $P(A_1) = 1/2$, otro reizi $P(A_2) = 1/2$, un trešo reizi – $P(A_3) = 1/2$. Varbūtība, ka visas trīs reizes uzkritīs ģerbonis, ir:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \times P(A_2) \times P(A_3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

Varbūtību P(A), ka notiks vismaz viens no savstarpēji neatkarīgiem notikumiem A_1, A_2, ... , A_n, var aprēķināt, atņemot no **viena** pretējo notikumu $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$, ..., $\bar{A}_n$ varbūtību reizinājumu:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}_1) \times P(\bar{A}_2) \times \ldots \times P(\bar{A}_n).$$

Piemēram, kravas piegādā ar trim transporta veidiem: upju, dzelzceļa un autotransportu. Varbūtība kravai pienākt laikā ar upju transportu ir 0,82, ar dzelzceļa transportu 0,87, ar autotransportu – 0,90. Jāaprēķina varbūtība, ka krava pienāks laikā vismaz pa vienu no ceļiem.

Varbūtība, ka kravu nepiegādās laikā ar vienu no transporta veidiem, ir:

$q_1 = 1 - 0{,}82 = 0{,}18;$

$q_2 = 1 - 0{,}87 = 0{,}13;$

$q_3 = 1 - 0{,}90 = 0{,}10.$

Varbūtība, ka krava pienāks laikā vismaz ar vienu no transporta veidiem, ir:

$$P(A) = 1 - 0{,}18 \times 0{,}13 \times 0{,}10 = 1 - 0{,}00234 = 0{,}99766.$$

Savstarpēji atkarīgu gadījuma notikumu varbūtību reizināšana.

Ja viena gadījuma notikuma iestāšanās ietekmē otra notikuma iestāšanās varbūtību, tad notikumus sauc par **savstarpēji atkarīgiem**.

Ja divi notikumi A un B ir savstarpēji atkarīgi, tad par nosacīto varbūtību $P_A(B)$ sauc notikuma B varbūtību, pieņemot, ka A jau noticis.

Piemēram, kastītē ir 26 loterijas biļetes, no kurām trīs ir ar laimestu. Iespējams noteikt varbūtību, ka pirmā uz labu laimi paņemtā biļete būs ar laimestu:

$$P(\mathrm{A}) = \frac{3}{26} = 0{,}115.$$

Pieņemsim, ka notikums A ir iestājies un, neatliekot biļeti atpakaļ, tiek ņemta nākamā. Varbūtība, ka arī šī loze būs ar laimestu, ir:

$$P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \frac{2}{25} = 0{,}08.$$

Divu atkarīgu notikumu kopējās notikšanas varbūtība ir viena notikuma varbūtības un otra notikuma nosacītās varbūtības reizinājums.

$$P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) \times P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}),$$

kur $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$ – notikuma B varbūtība ar nosacījumu, ka notikums A jau noticis.

Piemēram, varbūtība, ka abas pēc kārtas ņemtās loterijas biļetes būs ar laimestu, ir:

$$P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \frac{3}{26} \times \frac{2}{25}.$$

10.5. Maz ticamu notikumu praktiskās neiespējamības principi

Risinot daudzus praktiskus uzdevumus, jāsastopas ar notikumiem, kuru vērtības ir ļoti mazas, t. i., tās ir tuvu nullei. Vai var rēķināties, ka maz ticams notikums A atsevišķā novērojumā nenotiks? Šādu secinājumu nedrīkst izdarīt, jo nav izslēgts, kaut arī maz ticams, ka notikums var iestāties.

Varētu šķist, ka maz ticamu notikumu iestāšanos vai neiestāšanos nav iespējams paredzēt, bet ilgstoša pieredze parāda, ka maz ticamie notikumi atsevišķā novērojumā gandrīz visos gadījumos neiestājas. Balstoties uz šo faktu, pieņem šādu principu: **ja gadījuma notikumam ir ļoti maza varbūtība, tad var uzskatīt, ka atsevišķā novērojumā šis notikums neiestājas**.

Rodas jautājums, kādu varbūtību uzskatīt par mazu: 0,1; 0,01; 0,001 vai vēl mazāku? Varbūtību, ar kuru pētāmo notikumu var pieņemt par praktiski neiespējamu sauc par **nozīmes līmeni**. Praksē pagaidām visbiežāk lieto šādus nozīmes līmeņus: 0,1 (10 % līmenis), 0,05 (5 % līmenis), 0,01 (1 % līmenis). Tomēr šim jautājumam nevar pieiet viennozīmīgi. Piemēram, ja varbūtība, ka tālsatiksmes vilciens pienāks ar nokavēšanos ir 0,01, tad var uzskatīt, ka tas pienāks laikā arī tajā reizē, kad to sagaidīs. Turpretī, ja lidmašīna no 100 reisiem 99 veic sekmīgi, tad ar šādu lidmašīnu pasažieri nevēlēsies lidot.

Apskatītais princips ļauj paredzēt ne tikai notikumus, kuriem ir maza varbūtība, bet arī notikumus, kuru varbūtība ir tuvu skaitlim **viens**.

Līdz ar to no maz ticamu notikumu neiespējamības principa izriet šāds svarīgs lietošanas secinājums: ja gadījuma notikumu varbūtība ir tuvu skaitlim viens, tad praktiski var uzskatīt, ka atsevišķā novērojumā šis notikums iestājies.

Kādu varbūtību uzskatīt par tuvu skaitlim viens, ir atkarīgs no uzdevuma būtības.

10.6. Savstarpēji savienojamu notikumu varbūtību saskaitīšana

Divus gadījuma notikumus sauc par **savienojamiem**, ja viena notikuma iestāšanās **neizslēdz otra notikuma iestāšanos** tajā pašā novērojumā. Piemēram, metot spēļu kauliņu, par notikumu A uzskata skaitļa četri uzkrišanu, bet par notikumu B – pārskaitļa uzkrišanu. Tā kā četri ir pārskaitlis, šie notikumi ir savienojami. Var izvirzīt uzdevumu aprēķināt, kāda varbūtība, ka notiks viens no šiem savstarpēji savienojamiem notikumiem.

Varbūtība, ka notiks viens no savienojamiem notikumiem, ir vienāda ar šo notikumu varbūtību summu, no kuras atskaita abu notikumu kopīgās iestāšanās varbūtību, t. i., varbūtību reizinājumu.

$$P(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B}) - P(\mathrm{AB})$$

Tā kā notikumi A un B pēc nosacījumiem ir savienojami, tad notikums A + B iestāsies, ja iestāsies viens no trīs iespējamiem notikumiem: $\bar{\mathrm{A}}\mathrm{B}$, $\mathrm{A}\bar{\mathrm{B}}$ vai AB. Pēc nesavienojamu notikumu varbūtību saskaitīšanas teorēmas:

$$P(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = P(\mathrm{A}\bar{\mathrm{B}}) + P(\bar{\mathrm{A}}\mathrm{B}) - P(\mathrm{AB}). \tag{10.1.}$$

Notikums A iestāsies, ja iestāsies viens no diviem nesavienojamiem notikumiem: $\mathrm{A}\bar{\mathrm{B}}$ vai AB. Viena notikuma iestāšanās no vairākiem nesavienojamiem notikumiem ir vienāda ar visu šo notikumu summu:

$$P(\mathrm{A}) = P(\mathrm{A}\bar{\mathrm{B}}) + P(\mathrm{AB}).$$

Līdz ar to

$$P(\mathrm{A}\bar{\mathrm{B}}) = P(\mathrm{A}) - P(\mathrm{AB}). \tag{10.2.}$$

Analogi

$$P(\mathrm{B}) = P(\bar{\mathrm{A}}\mathrm{B}) + P(\mathrm{AB}).$$

Līdz ar to

$$P(\bar{\mathrm{A}}\mathrm{B}) = P(\mathrm{B}) - P(\mathrm{AB}). \tag{10.3.}$$

Ieliekot 10.2. un 10.3. izteiksmi 10.1. izteiksmē, iegūsim:

$$P(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B}) - P(\mathrm{AB}). \tag{10.4.}$$

Izmantojot iegūto 10.4. formulu, jāņem vērā, ka notikumi A un B var būt:

- savstarpēji neatkarīgi;
- savstarpēji atkarīgi.

Savstarpēji **neatkarīgiem** notikumiem:

$$P(\text{A}+\text{B}) = P(\text{A}) + P(\text{B}) - P(\text{A})P(\text{B}).$$

Savstarpēji **atkarīgiem** notikumiem:

$$P(\text{A}+\text{B}) = P(\text{A}) + P(\text{B}) - P(\text{A})P_{\text{A}}(\text{B}).$$

Ja notikumi A un B ir **nesavienojami**, tad to sakrišana ir neiespējams notikums un līdz ar to $P(\text{AB}) = 0$. Ceturtā formula **nesavienojamiem notikumiem** ir šāda:

$$P(\text{A}+\text{B}) = P(\text{A}) + P(\text{B}).$$

Piemēram, braucot autosacīkstēs ar pirmo mašīnu, varbūtība uzvarēt ir $P_1 = 0{,}6$, braucot ar otro mašīnu – $P_2 = 0{,}9$.

Varbūtība uzvarēt autosacīkstēs ar pirmo mašīnu nav atkarīga no otrās mašīnas sasniegtā rezultāta, tāpēc notikums A (uzvarēja pirmā mašīna) un notikums B (uzvarēja otrā mašīna) ir neatkarīgi notikumi. Notikuma AB (autosacīkstēs uzvarēja abas mašīnas) varbūtība ir:

$$P(\text{AB}) = P(\text{A}) + P(\text{B}) = 0{,}6 \times 0{,}9 = 0{,}54.$$

Varbūtība, ka autosacīkstēs uzvarēs vismaz viena no mašīnām, ir:

$$P(\text{A}+\text{B}) = P(\text{A}) + P(\text{B}) - P(\text{AB}) = 0{,}6 + 0{,}9 - 0{,}54 = 0{,}96.$$

Šajā piemērā notikumi A un B ir neatkarīgi notikumi un līdz ar to varbūtība, ka autosacīkstēs neuzvarēs neviena mašīna, ir:

$$1 - 0{,}6 = 0{,}4 \text{ un } 1 - 0{,}9 = 0{,}1.$$

Varbūtība, ka uzvarēs vismaz viena mašīna, ir:

$$P = 1 - 0{,}4 \times 0{,}1 = 0{,}96.$$

Kā redzams, iegūts tas pats rezultāts.

11. LITERATŪRA

Goša Z. *Statistika*. Mācību grāmata. Rīga: SIA "Jumis", 2003, 333 lpp.

Orlovska A. *Statistika*. Rīga: RTU, 2012, 191 lpp.

Orlovska A. *Statistika*. Rīga: RTU, 2007, 111 lpp.

Orlovska A. *Uzdevumu krājums statistikā*. Rīga: RTU, 2008, 97 lpp.

Orlovska A., Ose J. *Statistikas uzdevumu krājums*. Rīga: RTU, 2014, 57 lpp.

Statistikas dati no Latvijas Bankas interneta vietnes *https://www.bank.lv/*

Statistikas dati no LR Centrālās statistikas pārvaldes interneta vietnes *http://www.csp.gov.lv/*

Statistikas likums. *Latvijas Republikas Saeimas un Ministru Kabineta Ziņotājs*, https://likumi.lv/ta/id/274749-statistikas-likums

Vītols J. *Statistikas vispārīgā teorija*. Rīga: Zvaigzne, 1988, 291 lpp.