LATVIJAS UNIVERSITĀTE

Promocijas darba kopsavilkums

Insa Krēmere

STINGRO RIKARTA GREDZENU SAKĀRTOJUMI UN STRUKTŪRA

Rīga 2025

LATVIJAS UNIVERSITĀTE

EKSAKTO ZINĀTŅU UN
TEHNOLOĢIJU FAKULTĀTE

Insa Krēmere

STINGRO RIKARTA GREDZENU SAKĀRTOJUMI UN STRUKTŪRA

PROMOCIJAS DARBA KOPSAVILKUMS

Doktora grāda (*Ph. D.*) iegūšanai
matemātikas nozarē
Apakšnozare: algebra un matemātiskā loģika

Rīga 2025

Disertācija izstrādāta Latvijas Universitātes Eksakto zinātņu un tehnoloģiju fakultātes Matemātikas nodaļā no 2016. gada līdz 2024. gadam.

Disertācijā ietilpst anotācija, satura rādītājs, izmantoto simbolu saraksts, priekšvārds, ievads, astoņas nodaļas, secinājumi, pielikums, izmantotās literatūras saraksts, apmeklēto konferenču saraksts un autores publikāciju saraksts.

Promocijas darba forma: disertācija matemātikas nozares algebras un matemātiskās loģikas apakšnozarē.

Promocijas darba vadītājs:

Dr. math. **Jānis Cīrulis**, asociētais profesors

Darba recenzenti:

1. **Gregors Dolinars**, *Dr. math.*, profesors, Ļubļanas Universitāte, Slovēnija
2. **Kalle Kārli**, *Dr. math.*, emeritēts profesors, Tartu Universitāte, Igaunija
3. **Pēteris Daugulis**, *Dr. math.*, vadošais pētnieks, Daugavpils Universitāte, Latvija

Disertācijas aizstāvēšana notiks Latvijas Universitātes Matemātikas doktorantūras padomes publiskajā sēdē 2025. gada 16. maijā Jelgavas ielā 3.

Disertācija ir pieejama Latvijas Universitātes bibliotēkā, Kalpaka bulvārī 4, Rīgā.

Doktorantūras padomes priekšsēdētājs *Dr. math.*, prof. Uldis Strautiņš
Doktorantūras padomes sekretārs *Dr. math.*, assoc. prof. Jānis Bajārs

ISBN 978-9934-36-381-8
ISBN 978-9934-36-382-5 (PDF)

Anotācija

Šajā disertācijā tiek pētīti vairāki daļējie sakārtojumi noteiktās (iespējams, vienpusēju) Rikarta gredzenu klasēs, kurās ir spēkā kāds no tā saucamajiem *stingrības nosacījumiem*, kuri nodrošina, ka gredzens, kuram var nebūt involūcija, dažos aspektos tomēr līdzinās Rikarta *-gredzenam. Šī pieeja ļauj pārnest zināšanas no Rikarta *-gredzenu jomas uz plašāku gredzenu klasi bez involūcijas, parādot, ka Rikarta *-gredzeniem iegūtos rezultātus bieži vien var vismaz daļēji saglabāt.

Ar šādu mērķi mēs ieviešam stingrā labējā zvaigznes sakārtojuma versiju tā sauktajiem *labēji stingrajiem Rikarta gredzeniem*, iegūstot relatīvi ortopapildinātu sakārtotu kopu līdzīgi kā Rikarta *-gredzena gadījumā.

Daļa no disertācijas ir veltīta tam, lai katram no vairākiem daļējiem sakārtojumiem atrastu nosacījumus, pie kuriem Rikarta gredzenā, kurā ir spēkā piemērots stingrības nosacījums, eksistē šķēlumi un apvienojumi pēc attiecīgā sakārtojuma. Piemēram, mēs iegūstam virkni ekvivalentu nosacījumu, pie kuriem diviem tā sauktā *stingrā Rikarta gredzena* elementiem ir apvienojums pēc zvaigznes sakārtojuma.

Ar vienotu pieeju, kas saistās ar vājajām BCK-algebrām, lielākajai daļai pētīto daļējo sakārtojumu mēs iegūstam nosacījumus, pie kuriem attiecīgā sakārtotā kopa ir apakšējs pusrežģis.

Vēl viens disertācijas fokuss ir uz stingrā pusrežģa dekompozīcijām noteiktiem reducēto Rikarta gredzenu reduktiem. Citu starpā tiek parādīts, ka, ja ir dots reducēts Rikarta gredzens $\langle R, +, \cdot, 1\rangle$ ar viena argumenta operāciju $^\circ$, kura attēlo katru elementu uz tā minimālo idempotento dublikatoru, tad algebra $\langle R, \cdot, ^\circ, 1\rangle$ ir labēji kancelatīvu D-pusgrupu stingrs pusrežģis, un ka šī stingrā pusrežģa reprezentācija ir unikāla.

Atslēgas vārdi: Rikarta gredzens, Rikarta *-gredzens, stingrais Rikarta gredzens, reducēts Rikarta gredzens, zvaigznes sakārtojums, vienpusējs zvaigznes sakārtojums, kārava sakārtojums, restītes sakārtojums, Eibiena sakārtojums, apvienojums, šķēlums, apakšējs pusrežģis, relatīvi ortopapildināta sakārtota kopa, vājā diference, vājā BCK-algebra, stringrā pusrežģa dekompozīcija

Saturs

Saturs 4

Ievads 5

1 Rikarta gredzeni un stingrības nosacījumi tajos 8

2 Sakārtojumi stingrajos Rikarta gredzenos 10

3 Labējā zvaigznes sakārtojuma vispārinājumi 12

4 Minimālie augšējie sliekšņi, apvienojumi un šķēlumi 13

5 Stingrā labējā zvaigznes sakārtojuma īpašības 16

6 Apakšējā pusrežģa nosacījumi un vājās BCK-algebras 18

7 Īpašs gadījums: Reducēta Rikarta gredzena stingrā pusrežģa dekompozīcijas 19

Secinājumi 22

Pielikums 25

A Sakārtotas kopas ar papildu struktūru 25

B Daži pusgrupu teorijas pamatjēdzieni 27

Izmantotā literatūra 29

Apmeklēto konferenču saraksts 30

Autores publikācijas 32

Ievads

Pētījumu virzieni par daļējiem sakārtojumiem Rikarta gredzenos

Daļējie sakārtojumi Rikarta gredzenos un Rikarta *-gredzenos tiek pētīti jau vairāk nekā 40 gadus. Tos bieži pēta arī konkrētos piemēros, piemēram, matricu gredzenos vai Hilberta telpas ierobežoto lineāro operatoru gredzenā, vai arī īpašos Rikarta gredzenos, kuriem ir vienkāršāka struktūra, piemēram, reducētajos Rikarta gredzenos.

Pētījumu virzieni ietver dažādu sakārtojumu savstarpējo sakarību un līdzību izpēti (skat. piemēram, [Dolinar and Marovt, 2018]), vai arī pētniecību, kas apskata sakārtojumu saiknes ar jēdzieniem no gredzenu teorijas, piemēram, ar vispārinātajiem inversajiem elementiem (skat. [Marovt, 2015]). Cita interešu joma ir šo sakārtojumu īpašības vispārīgās sakārtojumu teorijas kontekstā, piemēram, apvienojumu un šķēlumu eksistence, kā arī papildināšanas un tā saukto sākumnogriežņu struktūra. Vēl viens virziens ir rezultātu pārnese no specifiskāka gadījuma, piemēram, no Rikarta *-gredzeniem, uz vispārīgākiem Rikarta gredzeniem vai pat vienpusējiem Rikarta gredzeniem (dažos gadījumos pat pusgrupām, skat. [Cīrulis, 2019]).

Pētāmie jautājumi šajā disertācijā: Šī disertācija pārsvarā ietilpst pēdējos divos no minētajiem virzieniem, bet cits mērķis ir arī pierādīt stiprākus rezultātus, kas ir spēkā specifiskos Rikarta gredzenos.

Stingrie Rikarta gredzeni

Stingrie Rikarta gredzeni tika ieviesti darbā [Cīrulis, 2016] kā neinvolutīvs Rikarta *-gredzenu vispārinājums (t.i., vispārinājums, kuram nav nepieciešama involūcija). Tie ir aprīkoti ar divām viena argumenta operācijām, kuras sauc par attiecīgi kreiso un labējo fokālo operāciju. Katrs Rikarta *-gredzens, kā arī katrs reducēts Rikarta gredzens, var tikt uzskatīts par stingro Rikarta gredzenu. Stingrs Rikarta gredzens pēc definīcijas ir (abpusējs) Rikarta gredzens, bet ir arī vienpusējas šī jēdziena versijas.

Šajā disertācijā tiek pētīti vairāku daļējo sakārtojumu neinvolutīvi varianti: Zvaigznes sakārtojums un vājais labējais zvaigznes sakārtojums tika vispārināti uz neinvolutīviem Rikarta gredzeniem rakstos [Cīrulis, 2015c] un [Cīrulis, 2016], un kārava sakārtojuma gadījumā tas ir izdarīts rakstā [Cīrulis, 2017]. Šī disertācija sniedz stingrā labējā zvaigznes sakārtojuma vispārinājumu uz tā sauktajiem *labēji stingrajiem Rikarta gredzeniem.*

Disertācijas mērķis

Disertācijas mērķis ir izpētīt, vai noteiktas īpašības, kuras šiem daļējiem sakārtojumiem ir spēkā Rikarta *-gredzenos, kaut kādā veidā saglabājas arī atbilstošajos neinvolutīvajos variantos, pielāgot vienpusējiem zvaigznes sakārtojumiem dažus jēdzienus, kurus izmanto zvaigznes sakārtojuma pētījumos, un atrast līdzvērtīgas vienpusējas versijas zināmiem rezultātiem par zvaigznes sakārtojumu.

Ir trīs galvenie rezultāti: Pirmkārt, tiek pierādīts, ka labēji stingrs Rikarta gredzens pēc stingrā labējā zvaigznes sakārtojuma ir relatīvi ortopapildināta sakārtota kopa. Otrkārt, ar vienotu pieeju, kas balstās uz vājām BCK-algebrām, vairākiem sakārtojumiem atrodam nepieciešamus un pietiekamus nosacījumus, lai piemērota tipa Rikarta gredzens būtu apakšējs pusrežģis pēc attiecīgā sakārtojuma. Trešais rezultāts attiecas uz reducēto Rikarta gredzenu īpašo gadījumu. Mēs apvienojam reducēta Rikarta gredzena R multiplikatīvās pusgrupas stingrā pusrežģa dekompozīciju (skatīt arī [Fountain, 1976]) ar stingrā pusrežģa dekompozīciju D-pusgrupai, kas iegūta no R multiplikatīvās pusgrupas, aprīkojot to ar vienvietīgu operāciju, kura katru elementu attēlo uz tā minimālo idempotento dublikatoru N.V. Subramanjama izpratnē.

Metodes

Tiek izmantotas metodes no dažādām algebras nozarēm. Lai iegūtu rezultātus par stingro labējo zvaigznes sakārtojumu, bieži izmantojam tā ciešo saikni ar vājo labējo zvaigznes sakārtojumu, kurš jau ir ticis pētīts stingros Rikarta gredzenos. Apakšējā pusrežģa nosacījumi vairākiem daļējiem sakārtojumiem tiek atrasti ar vispārinātu pieeju, izmantojot vājās BCK-algebras un līdzīgas struktūras. Turklāt, lai pētītu reducēto Rickarta gredzenu struktūru, tiek izmantota pieeja no pusgrupu teorijas.

Rezultātu aprobācija un autores ieguldījums

Disertācijas ietvaros iegūtie rezultāti tikuši prezentēti 10 starptautiskās un sešās vietējās konferencēs (detalizētākai informācijai skatīt apmeklēto konferenču sarakstu disertācijas beigās). Disertācijas galvenie rezultāti ir vai tiks publicēti četros zinātniskos rakstos: Cīrulis and Cremer [2022], Cremer [2024], Cremer [2025] un Cremer and Marovt [ND] (skatīt arī autores publikāciju sarakstu).

Rezultāti no 4.3. un 4.5. apakšnodaļām 4. nodaļā ir publicēti pirmajā rakstā Cīrulis and Cremer [2022], kas bija kopdarbs ar profesoru Jāni Cīruli. Šajā publikācijā autore pierādīja priekšlikumu 3.2, teorēmu 5.3 un daļu no teorēmas 5.4.

Otrais raksts Cremer [2024] sastāv no 3.1., 4.2. un 5.1. apakšnodaļām. Rezultāti no 6 nodaļas tiks publicēti trešajā rakstā Cremer and Marovt [ND]. Šajā kopdarbā ar profesoru Janko Marovtu autore pierādīja visus rezultātus un veica lielāko daļu rakstīšanas un rediģēšanas darbu. Beidzot, ceturtajā rakstā Cremer [2025] tiks publicēti rezultāti, kuri ir atrodami 7.1. un 7.2. apakšnodaļās.

Disertācijas struktūra

Disertācijai ir 165 lappuses. Tā ir sadalīta divās daļās: pirmā daļa ir ievaddaļa un satur pirmās divas nodaļas (nodaļas 1 un 2), savukārt otrā daļa satur pētījuma rezultātus (nodaļas 3 līdz 7).

Vispirms mēs 1. nodaļā apskatīsim attiecīgos Rikarta gredzenu veidus. Otrā ievaddaļas nodaļa ir 2. nodaļa, kurā tiek aplūkoti specifiski daļējie sakārtojumi dažādos Rikarta gredzenu veidos, īpaši zvaigznes sakārtojums, vienpusējie zvaigznes sakārtojumi un vājie vienpusējie zvaigznes sakārtojumi.

Otrā daļa sākas ar 3. nodaļu, kurā definējam stingro labējo zvaigznes sakārtojumu labēji stingrā Rikarta gredzenā un pierādām, ka tas tiešām ir daļējs sakārtojums. Tiek ieviests vēl viens daļējs sakārtojums labēji stingrā Rikarta gredzenā, kurš ir vājāks par stingro labējo zvaigznes sakārtojumu, bet stiprāks par vājo labējo zvaigznes sakārtojumu, un tādējādi var tikt uzskatīts par trešo labās zvaigznes sakārtojuma vispārinājumu. Pēc tam 4. nodaļā apskatām, pie kādiem nosacījumiem eksistē apvienojumi un šķēlumi pēc dažādiem daļējiem sakārtojumiem Rikarta gredzenos, kuros ir spēkā stingrības nosacījums. Tad 5. nodaļā izpētām, kādas īpašības ir labēji stingram Rikarta gredzenam ar stingro labējo zvaigznes sakārtojumu. Galvenais rezultāts ir tas, ka šī sakārtotā kopa ir relatīvi ortopapildināta. Tiek parādīti arī sākumnogriežņu iegremdējumi noteiktās sakārtotās kopās, kuras ir saistītas ar gredzena idempotentiem, un tiek raksturoti šādu izomorfismu vērtību kopas. Pierādām nosacījumus, lai attiecīgā sakārtotā kopa būtu apakšējs pusrežģis vienpusējiem zvaigznes sakārtojumiem stingrā Rikarta gredzenā, kā arī restītes sakārtojumam patvaļīgā unitārā gredzenā, 6. nodaļā. Pēdējā, tas ir, 7. nodaļā, mēs koncentrējamies uz reducētajiem Rikarta gredzeniem kā speciālu gadījumu. Galvenais rezultāts ir stingrā pusrežģa dekompozīcija reducēta Rikarta gredzena multiplikatīvajai pusgrupai, kas aprīkota ar viena argumenta operāciju, kura to pārvērš par D-pusgrupu. Izstrādājam arī līdzīgu stingrā pusrežģa dekompozīciju, kurā tiek izmantots greizais šķēlums D-pusgrupas operācijas vietā.

1. nodaļa

Rikarta gredzeni un stingrības nosacījumi tajos

1.1. Rikarta gredzeni

Labējs (kreiss) Rikarta gredzens ir gredzens R, kurā katram $a \in R$ eksistē idempotents $e \in R$ tāds, ka katram $x \in R$, $ax = 0$ tad un tikai tad, ja $ex = x$ ($xa = 0$ tad un tikai tad, ja $xe = x$). Tātad acīmredzot gredzens R ir labējais Rikarta gredzens tad un tikai tad, ja eksistē tāda vienvietīga operācija $'$, kas katru $a \in R$ attēlo par idempotentu a' ar īpašību, ka katram $x \in R$,

$$ax = 0 \text{ tad un tikai tad, ja } a'x = x. \tag{1.1}$$

Rakstā [Cīrulis, 2016] šādu operāciju sauc par *labēji fokālu operāciju*, pielāgojot terminu no [Foulis, 1960].

Līdzīgi, gredzens R ir kreiss Rikarta gredzens tad un tikai tad, ja eksistē viena argumenta operācija $^\backprime$ tāda, ka katram $a \in R$ elements $a^\backprime$ ir idempotents ar īpašību, ka katram $x \in R$,

$$xa = 0 \text{ tad un tikai tad, ja } xa^\backprime = x. \tag{1.2}$$

Rakstā [Cīrulis, 2016] šādu operāciju sauc par *kreisi fokālu operāciju*. Par *fokālu operāciju* mēs sauksim operāciju, kura ir vai nu labēji fokāla vai kreisi fokāla.

Definīcija 1.1. Rikarta gredzenu (respektīvi labēju Rikarta gredzenu) kopā ar kādu labēji fokālu operāciju sauc par *labēji fokālu* Rikarta gredzenu (respektīvi, par *labēji fokālu* labēju Rikarta gredzenu).

Definīcija 1.2. [Cīrulis and Cremer, 2018] Fokālu operāciju $'$ unitārā gredzenā R sauksim par *normālu*, ja $a'' = 1 - a'$ visiem $a \in R$ (kur a'' ir saīsinājums izteiksmei $(a')'$). Kreisu vai labēju Rikarta gredzenu, kura fokālā operācija ir normāla, dažreiz arī sauksim par *normālu*.

Definīcija 1.3. [Maeda, 1960] Pieņemsim, ka R ir gredzens un $a \in R$. Idempotentu $e \in R$ sauc par *elementa a labējo idempotentu*, ja visiem $x \in R$ vienādība $ax = 0$ ir spēkā tad un tikai tad, ja ir spēkā $ex = 0$.

To sauc par *elementa a kreiso idempotentu*, ja visiem $x \in R$ vienādība $xa = 0$ ir spēkā tad un tikai tad, ja ir spēkā $xe = 0$.

Apzīmēsim visu elementa a labējo idempotentu kopu ar $\mathrm{RI}(a)$ un visu tā kreiso idempotentu kopu ar $\mathrm{LI}(a)$.

Definīcija 1.4. Gredzenu R sauc par *reducētu*, ja tam nav neviena nenulles nilpotenta elementa, t.i., katram $a \in R$ un katram $n \in \mathbb{N}$, ja $a^n = 0$, tad $a = 0$.

Lemma 1.5. *Gredzens ar vienību ir reducēts Rikarta gredzens tad un tikai tad, ja tajā var definēt vienvietīgu operāciju $^\circ$, kas apmierina šādus nosacījumus:*
(a) $xx^\circ = x = x^\circ x$,
(b) $(xy)^\circ = x^\circ y^\circ$,
(c) $0^\circ = 0$.
Šajā gadījumā gredzena fokālo operāciju var izteikt kā $x' := 1 - x^\circ$.

Definīcija 1.6. (a) Pieņemsim, ka R ir labēji fokāls labējs Rikarta gredzens (kreisi fokāls kreiss Rikarta gredzens). Idempotentu $e \in R$ sauc par *slēgtu*, ja tas ir labēji fokālās operācijas (kreisi fokālās operācijas) vērtību kopā (t.i., $e = a'$ kādam $a \in R$). Mēs apzīmēsim labēji fokālās operācijas (kreisi fokālās operācijas) vērtību kopu ar P_r (P_l).
(b) Pieņemsim, ka R ir kreisi un labēji fokāls Rikarta gredzens ar normālu fokālo operāciju pāri, kas apmierina

$$a^{\backslash\prime} = a^{\backslash\backslash} \text{ and } a^{\prime\backslash} = a^{\prime\prime}. \tag{1.3}$$

Idempotentu $e \in R$ sauc par *slēgtu*, ja tas ir abu fokālo operāciju vērtību kopā. Abu fokālo operāciju vērtību kopu apzīmē ar P_rl.

Definīcija 1.7. *Labēji stingrs labējs Rikarta gredzens* ir labēji fokāls labējs Rikarta gredzens R, kuram ir spēkā šādi nosacījumi:
(a) labēji fokālā operācija ir normāla,
(b) visiem $p, q \in P_\mathrm{r}$,

$$pq \in P_\mathrm{r} \text{ tad un tikai tad, ja } pq = qp. \tag{1.4}$$

Labēji stingrs Rikarta gredzens ir labēji fokāls Rikarta gredzens (t.i., abpusējs Rikarta gredzens ar labēji fokālo operāciju), kuram ir spēkā šie paši nosacījumi.

Definīcija 1.8. [Cīrulis, 2016] *Stingrs Rikarta gredzens* ir kreisi un labēji fokāls Rikarta gredzens, kuram ir spēkā šādi nosacījumi:
(a) abas fokālās operācijas ir normālas un $a^{\backslash\prime} = a^{\backslash\backslash}$ un $a^{\prime\backslash} = a^{\prime\prime}$,
(b) visiem $p, q \in P_\mathrm{rl}$,

$$pq \in P_\mathrm{rl} \text{ tad un tikai tad, ja } pq = qp. \tag{1.5}$$

2. nodaļa

Sakārtojumi stingrajos Rikarta gredzenos

2.1. Zvaigznes sakārtojums un vienpusējie zvaigznes sakārtojumi

Definīcija 2.1. [Cīrulis, 2016] Pieņemsim, ka R ir kreisi un labēji fokāls Rikarta gredzens ar normālām fokālām operācijām, kurām ir spēkā $a^{\backslash\prime} = a^{\backslash\backslash}$ un $a^{\prime\backslash} = a^{\prime\prime}$. Gredzenā R definējam attiecību $\overset{*}{\leq}$ šādā veidā: Elementiem $a, b \in R$ ir spēkā $a \overset{*}{\leq} b$ tad un tikai tad, ja

$$a^{\backslash\backslash} b = a = b a^{\prime\prime}. \tag{2.1}$$

Kā pierādīts darbā [Cīrulis, 2016], stingrā Rikarta gredzenā attiecība $\overset{*}{\leq}$ ir daļējs sakārtojums. To sauc par *zvaigznes sakārtojumu*.

Definīcija 2.2. [Marovt et al., 2015, Definīcijas 10 un 11] Pieņemsim, ka R ir unitārs *-gredzens. Definējam divvietīgu attiecību $*\!\preceq$ gredzenā R šādā veidā: Elementiem $a, b \in R$ ir spēkā $a \ast\!\preceq b$, tad un tikai tad, ja eksistē projekcija $p \in R$ un idempotents $e \in R$ tādi, ka
- (a) kreisais anulators elementam a ir $R(1-p)$,
- (b) labējais anulators elementam a ir $(1-e)R$,
- (c) $pa = pb$,
- (d) $ae = be$.

Attiecību $*\!\preceq$ sauc par *stingro kreiso zvaigznes sakārtojumu* gredzenā R. Duāli definējam attiecību $\preceq\!*$: Elementiem $a, b \in R$ ir spēkā $a \preceq\!\ast b$ tad un tikai tad, ja eksistē projekcija $q \in R$ un idempotents $f \in R$ tādi, ka
- (a) kreisais anulators elementam a ir $R(1-f)$,
- (b) labais anulators elementam a ir $(1-q)R$,
- (c) $fa = fb$,
- (d) $aq = bq$.

Attiecību $\preceq\!*$ sauc par *stingro labējo zvaigznes sakārtojumu* gredzenā R.

Definīcija 2.3. [Cīrulis, 2015c, Piezīme 2] Pieņemsim, ka R ir labēji stingrs labējais Rikarta gredzens. Gredzenā R definējam attiecību $*\!\leq$ šādā veidā:

Elementiem $a, b \in R$ ir spēkā $a \ast\!\leq b$, ja

$$a = a^{\backprime\backprime} b \text{ un } a^{\backprime\backprime} \leq_E b^{\backprime\backprime}, \tag{2.2}$$

kur $\leq_E$ apzīmē idempotentu standarta sakārtojumu (i.e., idempotentiem $e, f \in R$, $e \leq_E f$ tad un tikai tad, ja $ef = fe = e$). Attiecību $\ast\!\leq$ sauc par *vājo kreiso zvaigznes sakārtojumu* gredzenā R. Duāli definējam attiecību $\leq\!\ast$: Elementiem $a, b \in R$ ir spēkā $a \leq\!\ast\, b$ tad un tikai tad, ja

$$a = ba'' \text{ un } a'' \leq_E b''. \tag{2.3}$$

Attiecību $\leq\!\ast$ sauc par *vājo labējo zvaigznes sakārtojumu* gredzenā R.

2.2. Citi daļējie sakārtojumi

Definīcija 2.4. [Cīrulis, 2017] *Kārava sakārtojums* stingrā Rikarta gredzenā ir attiecība $\overset{\diamond}{\leq}$, kas definēta šādi: $a \overset{\diamond}{\leq} b$ tad un tikai tad, ja

$$a'' \leq_E b'', a^{\backprime\backprime} \leq_E b^{\backprime\backprime} \text{ un } a = a^{\backprime\backprime} b a''. \tag{2.4}$$

Definīcija 2.5. [Rakic, 2015] Unitārā gredzenā R apzīmēsim elementa a kreiso, respektīvi labējo, anulatoru ar $\mathrm{ann_l}(a)$, respektīvi $\mathrm{ann_r}(a)$. Apzīmēsim

$$\mathcal{I}_R := \{x \in R \,\big|\, (\exists p \in R)(p^2 = p, \\ \mathrm{ann_l}(x) = \mathrm{ann_l}(p) \text{ un } \mathrm{ann_r}(x) = \mathrm{ann_r}(p))\}. \tag{2.5}$$

Dotam elementam $x \in R$ idempotents p no vienādības (2.5) ir viens vienīgs, ja tas eksistē. Tādēļ to varam apzīmēt ar p_x. Kopā $\mathcal{I}_R$ definējam attiecību $\overset{\sharp}{\leq}$ šādā veidā: Elementiem $a, b \in \mathcal{I}_R$ ir spēkā $a \overset{\sharp}{\leq} b$ tad un tikai tad, ja $a = bp_a = p_a b$. Attiecību $\overset{\sharp}{\leq}$ sauc par *restītes sakārtojumu*.

3. nodaļa

Labējā zvaigznes sakārtojuma vispārinājumi uz Rikarta gredzeniem, kuri apmierina stingrības nosacījumu

3.1. Stingrais labējais zvaigznes sakārtojums labēji stingrā Rikarta gredzenā

Definīcija 3.1. Pieņemsim, ka R ir labēji stingrs labējais Rikarta gredzens un $a, b \in R$. Definējam attiecību $\preceq *$ šādā veidā: $a \preceq * \, b$ tad un tikai tad, ja eksistē idempotents f un slēgtais idempotents p ar šādām īpašībām:

($\preceq *1$) visiem $x \in R$ ir spēkā $ax = 0$ tad un tikai tad, ja ir spēkā $x \in (1 - p)R$,

($\preceq *2$) visiem $x \in R$ ir spēkā $xa = 0$ tad un tikai tad, ja ir spēkā $x \in R(1 - f)$,

($\preceq *3$) $ap = bp$,

($\preceq *4$) $fa = fb$.

Teorēma 3.2. [Cremer, 2024] *Labēji stingrā Rikarta gredzenā attiecība $\preceq *$ no Definīcijas 3.1 ir daļējs sakārtojums.*

Sauksim attiecību $\preceq *$ par *stingro labējo zvaigznes sakārtojumu*.

3.2. Labējie zvaigznes sakārtojumi un labējie telpiskie priekšsakārtojumi

Definīcija 3.3. (a) Pieņemsim, ka R ir labēji fokāls labējs Rikarta gredzens. *Vājo labējo telpisko priekškārtojumu* $\sqsubset_r^w$ tajā definē ar nosacījumu, ka $a \sqsubset_r^w b$ tad un tikai tad, ja $a''b'' = a''$.

(b) Pieņemsim, ka R ir gredzens. *Labējo telpisko priekškārtojumu* $\sqsubset_r$ tajā definē ar nosacījumu, ka $a \sqsubset_r b$ tad un tikai tad, ja $Ra \subseteq Rb$.

(c) Pieņemsim, ka R ir gredzens. *Stingro labējo telpisko priekškārtojumu* $\sqsubset_r^s$ tajā definē ar nosacījumu, ka $a \sqsubset_r^s b$ tad un tikai tad, ja eksistē tāds $e \in \mathrm{LI}(a)$, ka $a = eb$ un $fe = e$ visiem $f \in \mathrm{LI}(b)$.

Apgalvojums 3.4. *1. Labēji stingrā labējā Rikarta gredzenā $a \leq * \ b$ tad un tikai tad, ja $a = ba''$ un $a \sqsubset_r^w b$.*

2. Labēji stingrā Rikarta gredzenā $a \preceq * \ b$ tad un tikai tad, ja $a = ba''$ un $a \sqsubset_r^s b$.

Teorēma 3.5. *Pieņemsim, ka R ir labēji fokāls labējs Rikarta gredzens, un ka $\preceq'_*$ ir attiecība, kas definēta gredzenā R ar nosacījumu*

$$a \preceq'_* b \text{ tad un tikai tad, ja } a = ba'' \text{ un } Ra \subseteq Rb. \tag{3.1}$$

Ja R ir labēji stingrs labējs Rikarta gredzens, tad $\preceq'_*$ ir daļējs sakārtojums.

Teorēma 3.6. *Pieņemsim, ka a un b ir labēji stingrā Rikarta gredzena R elementi.*
(a) *Ja $a \preceq * \ b$, tad $a \preceq'_* b$.*
(b) *Ja $a \preceq'_* b$, tad $a \leq * \ b$.*

4. nodaļa

Minimālie augšējie sliekšņi, apvienojumi un šķēlumi pie atbilstošiem nosacījumiem

4.1. Apvienojumi pēc kārava sakārtojuma

Teorēma 4.1. *Pieņemsim, ka R ir stingrs Rikarta gredzens un $a, b, x \in R$ ir tādi, ka $a, b \overset{\diamond}{\leq} x$. Apzīmēsim $u = (a^{\backprime\backprime} \vee_P b^{\backprime\backprime})x(a'' \vee_P b'')$. Tad ir spēkā šāda ekvivalence:*
(a) *$a, b \overset{\diamond}{\leq} u$,*
(b) *$u^{\backprime\backprime} = a^{\backprime\backprime} \vee_P b^{\backprime\backprime}$ un $u'' = a'' \vee_P b''$,*
(c) *u ir minimāls augšējs slieksnis elementiem a un b,*
(d) *u ir mazākais augšējais slieksnis elementiem a un b sākumnogrieznī $[0, x]_{\overset{\diamond}{\leq}}$.*

4.2. Nosacījumi šķēlumu un apvienojumu eksistencei pēc stingrā labējā zvaigznes sakārtojuma $\preceq *$

Lemma 4.2. [Cremer, 2024, Lemma 5.1] *Pieņemsim, ka R ir labēji stingrs Rikarta gredzens un $a, b, c \in R$ ir tādi, ka $a \leq * \, b \leq * \, c$. Ja $a \preceq * \, c$, tad arī $a \preceq * \, b$.*

Teorēma 4.3. [Cremer, 2024, Teorēma 5.2] *Pieņemsim, ka R ir labēji stingrs Rikarta gredzens un ka a, b ir elementi no R tādi, ka $a, b \preceq * \, x$ kādam $x \in R$.*

(a) *Ja $a \wedge * \, b \preceq * \, x$, tad $a \curlywedge * \, b$ eksistē un $a \curlywedge * \, b = a \wedge * \, b$.*

(b) *Ja eksistē $a \curlywedge * \, b$, tad tas ir mazākais augšējais slieksnis sākumnogrieznī $[0, x]_{\preceq *}$ attiecībā pret vājo labējo zvaigznes sakārtojumu $\leq *$.*

Teorēma 4.4. [Cremer, 2024, Teorēma 5.3] *Pieņemsim, ka R ir labēji stingrs Rikarta gredzens un ka a, b ir elementi no R ar īpašību, ka $a, b \preceq * \, x$ kādam $x \in R$.*

(a) *Ja eksistē $a \curlyvee * \, b$, tad $a \curlyvee * \, b = a \vee * \, b$.*

(b) *Ja $a \vee * \, b \preceq * \, x$, tad $a \vee * \, b$ ir mazākais augšējais slieksnis elementiem a un b sākumnogrieznī $[0, x]_{\leq *}$ attiecībā pret stingro labējo zvaigznes sakārtojumu $\preceq *$.*

4.3. Koherences jēdziens bez involūcijas

Definīcija 4.5 (Cīrulis)**.** [Cīrulis and Cremer, 2022, Definition 3.5] Pieņemsim, ka R ir stingrs Rikarta gredzens. Elementus $a, b \in R$ sauksim par *vāji koherentiem*, ja

$$a^{\backprime\backprime} b = ab'' \text{ un } b^{\backprime\backprime} a = ba''. \tag{4.1}$$

Lemma 4.6. [Cīrulis and Cremer, 2022]

(a) *Jebkurš slēgtu idempotentu pāris ir vāji koherents.*

(b) *Slēgti idempotenti ir koherenti tad un tikai tad, ja tie komutē.*

Definīcija 4.7. Pieņemsim, ka R ir stingrs Rikarta gredzens. Tā elementus a, b sauksim par

(a) labēji koherentiem pēc Djikiča, ja $xa'' = a$ un $xb'' = b$,

(b) kreisi koherentiem pēc Djikiča, ja $a^{\backprime\backprime} x = a$ un $b^{\backprime\backprime} x = b$,

(c) koherentiem pēc Djikiča, ja tie ir gan labēji, gan kreisi koherenti pēc Djikiča.

4.4. Šķēlumi un apvienojumi pēc vājā labējā zvaigznes sakārtojuma labēji koherentiem elementiem

Lemma 4.8. *Labēji stingra labējā Rikarta gredzena elementi a, b ir labēji koherenti tad un tikai tad, ja tiem eksistē šķēlums pēc vājā labējā zvaigznes sakārtojuma un $a \wedge * \, b = ab'' = ba''$.*

Teorēma 4.9. *Pieņemsim, ka a, b ir labēji stingra labēja Rikarta gredzena R elementi, kuriem eksistē augšējs slieksnis pēc vājā labējā zvaigznes sakārtojuma $\leq *$. Tad šādi nosacījumi ir ekvivalenti:*

(a) $a''b'' = b''a''$,
(b) *a un b ir labēji koherenti,*
(c) $ab'' = a \wedge * \, b = ba''$,
(d) $a + ba' = a \vee * \, b = b + ab'$,
(e) $a \vee * \, b = a + b - (a \wedge * \, b)$,
(f) $a \vee * \, b = ab' + (a \wedge * \, b) + ba'$ *un* $a''b'' = b''a''$.

4.5. Augšējo sliekšņu un apvienojumu eksistence pēc zvaigznes sakārtojuma

Teorēma 4.10. [Cīrulis and Cremer, 2022] *Pieņemsim, ka R ir stingrs Rikarta gredzens. Elementiem a un b no R ir augšējs slieksnis pēc zvaigznes sakārtojuma tad un tikai tad, ja tie ir vāji koherenti un ir labēji koherenti pēc Djikiča.*

Teorēma 4.11. [Cīrulis and Cremer, 2022, Theorem 5.4] *Pieņemsim, ka R ir stingrs Rikarta gredzens un $a, b \in R$. Tad šādi nosacījumi ir ekvivalenti:*

(a) *a un b ir koherenti,*
(b) *elementiem a un b eksistē augšējs slieksnis pēc zvaigznes sakārtojuma, un* $ab'' \overset{*}{\leq} a, ba'' \overset{*}{\leq} b$,
(c) $a \overset{*}{\vee} b$ *eksistē, un* $a + ba' = a \overset{*}{\vee} b = b + ab'$,
(d) $a \overset{*}{\vee} b$ *eksistē, un*

    (1) *a un b ir labēji koherenti,*

    (1) $a \overset{*}{\wedge} b$ *eksistē un* $a \overset{*}{\vee} b = ab' + a \overset{*}{\wedge} b + ba'$,

(e) $a \overset{*}{\vee} b$ *eksistē un* $a \overset{*}{\vee} b = a + b - a \overset{*}{\wedge} b$.

5. nodaļa

Stingrā labējā zvaigznes sakārtojuma īpašības

5.1. Sekcionālas ortopapildināšanas stingrajam labējam zvaigznes sakārtojumam

Teorēma 5.1. [Cremer, 2024] *Pieņemsim, ka R ir labēji stingrais Rikarta gredzens ar stingro labējo zvaigznes sakārtojumu un sekcionālām ortopapildināšanām, kuras definētas kā*

$$a_x^{\perp} := x - a = xa', \text{ ja } a \preceq * \, x. \tag{5.1}$$

Tad sakārtotā kopa $\langle R, \preceq * \rangle$ ir relatīvi ortopapildināta. Turklāt, ja $a, b \preceq * \, x$ un $a \preceq * \, b_x^{\perp}$ kādam $a, b, x \in R$, tad $a \curlyvee * \, b = a \vee * \, b$.

5.2. Stingrā labējā zvaigznes ortogonalitāte

Teorēma 5.2. *Pieņemsim, ka R ir labēji stingrais Rikarta gredzens un $\perp$ ir ortogonalitātes attiecība, kuru inducē relatīvi ortopapildinātajā sakārtotajā kopā $\langle R, \preceq * \rangle$ (kur $\preceq *$ apzīmē stingro labējo zvaigznes sakārtojumu). Tad $a \perp b$ tad un tikai tad, ja*

$$a'' \perp b'' \text{ un } fa = 0 \text{ kādam } f \in \mathrm{LI}(b), \tag{5.2}$$

kur $\perp$ apzīmē slēgto idempotentu ortogonālitātes attiecību kuru definē kā $p \perp q \iff pq = 0 \iff qp = 0$.

5.3. Sākumnogriežņu izomorfismi

5.3.1 Izomorfisms P_{r} sākumnogriežņa apakškopā

Teorēma 5.3. *Ja R ir labēji stringrs Rikarta gredzens un $x \in R$, tad attēlojums*

$$\begin{aligned} \phi_{\preceq^*} : [0,x]_{\preceq^*} &\to \{p \in [0,x'']_{\leq} \mid (\exists e \in \mathrm{LI}(xp))ex = xp\} \\ a &\mapsto a'' \end{aligned}$$

ir sakārtojuma izomorfisms, kas saglabā ortogonalitātes attiecību $\perp$.

5.3.2 Izomorfisms kopas $E \times P_{\mathrm{r}}$ ekvivalences klašu apakškopā

Definīcija 5.4. *Labējais priekšsakārtojums* idempotentu kopā E labēji stingrā Rikarta gredzenā (vai pusgrupā) tiek definēts ar

$$e \lesssim_r f \text{ tad un tikai tad, ja } fe = e. \tag{5.3}$$

Definīcija 5.5. *Labējā ekvivalence* labēji stingra Rikarta gredzena idempotentu kopā (vai pusgrupas idempotentu kopā) ir ekvivalences attiecība $\sim_r$, kas definēta kā

$$e \sim_r f \text{ tad un tikai tad, ja } (ef = f \text{ un } fe = e). \tag{5.4}$$

Ja R ir labēji stingrs Rikarta gredzens un $e \in R$ ir idempotents, tad e ekvivalences klase pēc attiecības $\sim_r$ ir kopa $\mathrm{LI}(e)$.

Apzīmēsim

$$\widetilde{E} := \{\mathrm{LI}(e) \mid e \in E\}. \tag{5.5}$$

Daļējo sakārtojumu, kuru kopā $\widetilde{E}$ inducē priekšsakārtojums $\lesssim_r$, apzīmēsim ar $\leq$ (proti, idempotentiem e un f, $\mathrm{LI}(e) \leq \mathrm{LI}(f)$ tad un tikai tad, ja $e \lesssim_r f$).

Teorēma 5.6. *Pieņemsim, ka R ir labēji stingrs Rikarta gredzens un $x \in R$. Tad attēlojums*

$$\begin{aligned} \phi : \ [0,x]_{\preceq^*} &\to \widetilde{E} \times P_{\mathrm{r}} \\ a &\mapsto (\mathrm{LI}(a), a'') \end{aligned}$$

ir sakārtojuma iegremdējums un

$$\operatorname{im}\phi = \{(\mathrm{LI}(e),p) \in \widetilde{E} \times P_{\mathrm{r}} \mid \mathrm{LI}(e) \leq \mathrm{LI}(x) \text{ un } p \leq_E x'' \text{ un } ex = xp\}. \tag{5.6}$$

6. nodaļa

Apakšējā pusrežģa nosacījumi un vājās BCK-algebras

Sekas 6.1. [Cremer and Marovt, ND] *Pieņemsim, ka R ir labēji strings Rikarta gredzens un $\leq^*$ ir vājais vai stingrais labējais zvaigznes sakārtojums. Tad šādi nosacījumi ir ekvivalenti:*

(a) *Sakārtotā kopa $\langle R, \leq^* \rangle$ ir apakšējs pusrežģis.*

(b) *Sakārtotajā kopā R eksistē divvietīga operācija $\setminus_*$, kas apmierina nosacījumus*

> ($\setminus$1) *ja $a \leq b$, tad $b \setminus_* a = b \ominus a$.*
>
> ($\setminus$2) *$a \ominus (a \setminus_* b)$ ir definēts un $a \ominus (a \setminus_* b) \leq b$,*
>
> ($\setminus$3) *ja $a \leq b$, tad $c \setminus_* b \leq c \setminus_* a$.*

(c) *Sakārtotajā kopā R eksistē divvietīga operācija $\setminus_*$ ar īpašību, ka $\langle R, \setminus_*, 0 \rangle$ ir vājā BCK-algebra un $b \setminus_* a = b - a$, ja $a \leq^* b$.*

Ja kāds no šiem nosacījumiem izpildās, tad pastāv tikai viena vienīga operācija, kas apmierina punkta (b) vai punkta (c) nosacījumus. Operācija apmierina punkta (b) nosacījumus tad un tikai tad, ja tā apmierina punkta (c) nosacījumus. Turklāt vājā BCK-algebra $\langle \mathcal{I}_R, \setminus_*, 0 \rangle$ ir komutatīva, un elementu $x, y \in \mathcal{I}_R$ šķēlums $x \wedge_* y$ ir $x - (x \setminus_* y)$.

Sekas 6.2. [Cremer and Marovt, ND] *Pieņemsim, ka R ir gredzens ar vieninieku un $\mathcal{I}_R$ ir R apakškopa, kas definēta vienādībā (2.5). Tad šādi nosacījumi ir ekvivalenti:*

(a) *Sakārtotā kopa* $\langle \mathcal{I}_R, \overset{\sharp}{\leq} \rangle$ *ir apakšējs pusrežģis.*

(b) *Kopā* $\mathcal{I}_R$ *eksistē divvietīga operācija* $\setminus_\sharp$ *ar īpašībām, ka* $b \setminus_\sharp a = b - a$*, ja* $a \overset{\sharp}{\leq} b$*, un* $\langle \mathcal{I}_R, \setminus_\sharp, 0 \rangle$ *ir vājā BCK-algebra.*

(c) *Kopā* $\mathcal{I}_R$ *eksistē divvietīga operācija* $\setminus_\sharp$*, kas apmierina nosacījumus* $(\setminus 1)$, $(\setminus 2)$ *un* $(\setminus 3)$ *no Sekām* 6.1 *(ar operāciju* $\setminus_\sharp$ *operācijas* $\setminus_*$ *vietā).*

Ja kāds no šiem nosacījumiem izpildās, tad pastāv tikai viena vienīga operācija, kas apmierina punkta (b) *vai punkta* (c) *nosacījumus. Operācija apmierina punkta* (b) *nosacījumus tad un tikai tad, ja tā apmierina punkta* (c) *nosacījumus. Turklāt vājā BCK-algebra* $\langle \mathcal{I}_R, \setminus_\sharp, 0 \rangle$ *ir komutatīva, un elementu* $x, y \in \mathcal{I}_R$ *šķēlums* $x \overset{\sharp}{\wedge} y$ *ir* $x - (x \setminus_\sharp y)$*.*

7. nodaļa

Īpašs gadījums: Reducēta Rikarta gredzena stingrā pusrežģa dekompozīcijas

Piemērs 7.1. Pieņemsim, ka R ir reducēts Rikarta gredzens un $\langle E, \leq_E \rangle$ ir tā idempotentu pusrežģis.

Katram idempotentam e apzīmēsim ar $\cdot_e$ gredzena reizināšanas operācijas ierobežojumu uz tā saukto *m-domēnu* $M_e := \{a \in R \mid a^\circ = e\}$. Ar $\mathcal{M}$ apzīmēsim visu m-domēnu $\langle M_e, \cdot_e \rangle$ saimi.

Katram pārim $e, f \in E$ ar īpašību $e \leq_E f$ definēsim šādu attēlojumu ϕ_e^f:

$$\begin{aligned} \phi_e^f : \; M_f &\to M_e \\ x &\mapsto xe. \end{aligned} \tag{7.1}$$

Apzīmēsim ar Φ visu attēlojumu ϕ_e^f kopu.

Ir viegli pārbaudīt, ka $\langle \mathcal{M}, \Phi \rangle$ ir pusgrupu inversā sistēma. Apzīmēsim šo inverso sistēmu ar $\mathrm{sys}\, R$.

Šajā piemērā aprakstītās konstrukcijas rezultāts ir ļoti līdzīgs konstrukcijas rezultātam PP-monoīdos, kas atrodams darbā Fountain [1976].

Sekas 7.2. [Cremer, 2025]

(a) *Pieņemsim, ka* $\langle R, +, \cdot, 1 \rangle$ *ir reducēts Rikarta gredzens. Tad* $\langle R, \cdot \rangle = \mathfrak{S}\,(\mathrm{sys}\, R)$.

(b) *Pieņemsim, ka $\langle \mathcal{A}, \mathcal{H} \rangle$ ir savstarpēji neškeļošos labēji kancelatīvo pusgrupu inversā sistēma pār apakšējo pusrežģi S. Ja $\mathfrak{S}\langle \mathcal{A}, \mathcal{H} \rangle = \langle R, \cdot \rangle$ kādam reducētam Rikarta gredzenam R, tad $\langle \mathcal{A}, \mathcal{H} \rangle = \operatorname{sys} R$.*

7.1. Stingrā pusrežģa dekompozīcija, izmantojot D-pusgrupas un to inversās sistēmas

7.1.1 D-pusgrupu inversā sistēma, kuru veido m-domēni

Apgalvojums 7.3. [Cremer, 2025] *Pieņemsim, ka R ir reducēts Rikarta gredzens un ka E ir tā idempotentu pusrežģis. Katram idempotentu pārim e, f, kas apmierina nosacījumu $e \leq_E f$, definējam attēlojumu $\phi_e^f : M_f \to M_e$ kā norādīts Vienādojumā (7.1) (proti, $\phi_e^f(x) = xe$). Definējam*

$$\mathcal{M}_1^\circ = \{\langle M_e, \cdot_e, {}^\circ_e, e\rangle \mid e \in E\} \tag{7.2}$$

ar $a \cdot_e b := a \cdot b$ un $a_e^\circ := e$, un

$$\Phi = \{\phi_e^f \mid e, f \in E \text{ un } e \leq_E f\} \tag{7.3}$$

kā norādīts Piemērā 7.1. Tad $\langle \mathcal{M}_1^\circ, \Phi \rangle$ ir labēji kancelatīvu D-monoīdu inversā sistēma.

Definīcija 7.4. [Cremer, 2025] Apgalvojumā 7.3 definēto D-monoīdu inverso sistēmu $\langle \mathcal{M}_1^\circ, \Phi \rangle$ sauksim par *reducētā Rikarta gredzena R D-monoīdu inverso sistēmu*, un apzīmēsim to ar $\operatorname{sys}_1^\circ R$.

7.1.2 D-monoīdu stingrie pusrežģi

Definīcija 7.5. [Cremer, 2025]

(a) Pieņemsim, ka $\langle \mathcal{A}^\circ, \mathcal{H} \rangle$ ir savstarpēji neškeļošos D-pusgrupu inversā sistēma pār apakšējo pusrežģi S. Visu tā D-pusgrupu apvienojumā $A = \bigcup_{s \in S} A_s$ definējam divvietīgu operāciju $\bullet$, kā tas ir dots Vienādībā (B.1), un vienvietīgu operāciju ${}^\bullet$ šādā veidā: Ja $x \in A_s$, tad

$$x^\bullet := x_s^\circ. \tag{7.4}$$

Tad mēs rakstām $A = \mathfrak{S}^\circ \langle \mathcal{A}^\circ, \mathcal{H} \rangle$ un saucam algebru $\langle A, \bullet, {}^\bullet \rangle$ par *D-pusgrupu stingru pusrežģi* (*ko inducē inversā sistēma* $\langle \mathcal{A}^\circ, \mathcal{H} \rangle$).

(b) Ja $\langle \mathcal{A}^\circ, \mathcal{H} \rangle$ ir arī D-monoīdu inversā sistēma pār pusrežģi S, kuram ir lielākais elements $\top$, tad mēs varam definēt arī konstanti $\mathbf{1}$ šādā veidā:

$$\mathbf{1} := 1_\top. \tag{7.5}$$

Mēs rakstām $A = \mathfrak{S}_1^\circ[\langle \mathcal{A}^\circ, \mathcal{H}\rangle]$ un saucam algebru $\langle A, \bullet, {}^\bullet, \mathbf{1}\rangle$ par *D-monoīdu stringru pusrežģi.*

Apgalvojums 7.6. [Cremer, 2025]

(a) *Katrs D-pusgrupu strings pusrežģis ir D-pusgrupa.*

(b) *Katrs D-monoīdu strings pusrežģis ir D-monoīds.*

7.1.3 M-domēnu gredzena D-pusgrupas redukta dekompozīcija

Sekas 7.7. [Cremer, 2025]

(a) *Ja R ir reducēts Rikarta gredzens, kas bagātināts ar operāciju $^\circ$, tad $\langle R, \cdot, ^\circ, 1\rangle = \mathfrak{S}_1^\circ(\mathrm{sys}_1^\circ R)$.*

(b) *Pieņemsim, ka $\langle \mathcal{A}^\circ, \mathcal{H}\rangle$ ir savstarpēji nešķeļošos labēji kancelatīvu D-pusgrupu inversā sistēma pār kādu apakšējo pusrežģi un visām tā D-pusgrupām ir neitrālais elements. Ar $\mathcal{A}_1^\circ$ apzīmēsim D-monoīdu saimi, kas iegūta no D-pusgrupu saimes $\mathcal{A}^\circ$, iekļaujot neitrālos elementos signatūrās. Pieņemsim, ka $\mathfrak{S}^\circ\langle \mathcal{A}^\circ, \mathcal{H}\rangle = \langle R, \cdot, ^\circ, 1\rangle$ kādam reducētam Rikarta gredzenam R ar operāciju $^\circ$. Tad $\langle \mathcal{A}_1^\circ, \mathcal{H}\rangle = \mathrm{sys}_1^\circ R$.*

Secinājumi

3. nodaļa Šīs nodaļas galvenais rezultāts ir stingrā labējā zvaigznes sakārtojuma vispārinājums uz labēji stringrajiem Rikarta gredzeniem. Tas ir uzlabojums salīdzinājumā ar Marovt et al. [2015], kur stingrais labējais zvaigznes sakārtojums tika ieviests Rikarta *-gredzeniem. Tiek uzrādītas neinvolutīvas versijas Definīcijai 11, Teorēmai 9 un Teorēmai 10 no Marovt et al. [2015].

4. nodaļa Attiecībā uz kārava sakārtojumu uz stingrā Rikarta gredzenā, tika atrasts pietiekamais nosacījums divu elementu apvienojuma eksistencei sākumnogrieznī.

Attiecībā uz stingro labējo zvaigznes sakārtojumu labēji stringrā Rikarta gredzenā tika atrasti daži nosacījumi, kas attiecas uz šķēlumu un apvienojumu eksistenci sākumnogriežņos. Šie rezultāti ir vājāki nekā tie, kas zināmi vājā labējā zvaigznes sakārtojuma gadījumā (skatīt [Cīrulis, 2015c, Teorēma 4.3, Vienādojumi (4.2) un (4.3)]), taču tie dod nosacījumus, kuros šķēlumi un apvienojumi pēc abiem labējiem zvaigznes sakārtojumiem ir vienādi, kas arī ir interesanti.

Attiecībā uz vājo labējo zvaigznes sakārtojumu labēji stingrā labējā Rikarta gredzenā noskaidrojām, ka labējā prekoherence ir pietiekams nosacījums, lai diviem elementiem būtu šķēlums, tādējādi uzlabojot Vienādojumu (4.2) no Cīrulis [2015c]. Turklāt tika iegūti rezultāti, kuri atklāj ciešo saistību starp vājo labējo zvaigznes sakārtojumu un gan labējās prekoherences, gan labējās koherences jēdzieniem.

Attiecībā uz zvaigznes sakārtojumu, Teorēma 4.5.3 ir gan uzlabojums, gan neinvolutīva versija Teorēmai 4.5 no Cīrulis [2015a].

5. nodaļa Viens no šīs disertācijas galvenajiem rezultātiem ir stingrā labējā zvaigznes sakārtojuma $\preceq*$ struktūras apraksts labēji stringrā Rikarta gredzenā R. Proti, tika pierādīts, ka $\langle R, \preceq* \rangle$ ir relatīvi ortopapildināts pusrežģis, iegūstot neinvolutīvu versiju iepriekšējam autores pētījumam, kurš aprobežojās ar Rikarta *-gredzeniem (skatīt Krēmere [2016]).

Visi rezultāti no 5. nodaļas paplašina saistītos pētījumus par stringro Rikarta gredzenu, kurš sakārtots pēc zvaigznes sakārtojuma, kā arī par labēji stingro Rikarta gredzenu, kas aprīkots ar vājo labējo zvaigznes sakārtojumu.

6. nodaļa Šajā nodaļā, kas satur vēl vienu galveno disertācijas rezultātu, vispirms ieguvām vispārīgus rezultātus, kurus pēc tam pielietojām dažiem sakārtojumiem gredzenos, tostarp Rikarta gredzenos.

Tika iegūti pusrežģa nosacījumi vājajam labējam zvaigznes sakārtojumam, stingrajam labējam zvaigznes sakārtojumam un restītes sakārtojumam. Šie nosacījumi ir analogi atbilstošajam pusrežģa nosacījumam zvaigznes sakārtojumam, kas dots Lemmā 5.4 un Teorēmā 5.5 darbā [Cīrulis, 2015a]. Iespējams, ka pastāv vēl citi sakārtojumi gredzenos, komutatīvā grupās vai citās struktūrās, kur Teorēma 6.2.1 varētu būt noderīga — tā ir iespēja turpmākiem pētījumiem.

7. nodaļa Šajā nodaļā kā trešo galveno disertācijas rezultātu parādām stingrā pusrežģa dekompozīcijas dažiem reducētā Rikarta gredzena reduktiem.

Tas balstās uz līdzīgu rezultātu par labējiem PP-monoīdiem, skatīt Teorēmu 1 darbā Fountain [1976]. Atšķirībā no tā, ieguvām rezultātus arī neunitārajā gadījumā (m-domēnu gredzenos) un iekļāvām stingrā pusrežģa konstrukcijā papildus operācijas – vienvietīgo operāciju $^\circ$ un greizo šķēlumu $\overleftarrow{\wedge}$ reducētā Rikarta gredzenā.

Diemžēl rezultāti nav iegūti vispārējiem stingriem Rikarta gredzeniem. Tas varētu būt virziens turpmākiem pētījumiem, lai paplašinātu rezultātus par stingrā pusrežģa dekompozīcijām uz piemērotiem plašāku Rikarta gredzenu klašu reduktiem.

Pielikums

Pielikums A

Sakārtotas kopas ar papildu struktūru

Definīcija A.1. Attiecību $\perp$, kas definēta ortopapildinātā sakārtotā kopā kā

$$a \perp b \text{ tad un tikai tad, ja } a \leq b^{\perp} \tag{A.1}$$

(vai, ekvivalentā veidā, $a \perp b$ tad un tikai tad, ja $b \leq a^{\perp}$), sauc par *ortogonalitātes attiecību, ko inducē ortopapildināšana*.

A.1. Ortopapildināto sakārtoto kopu vispārinājumi

Definīcija A.2. [Cīrulis, 2015c] Sakārtotu kopu ar mazāko elementu $\langle A, \leq, 0\rangle$ sauc par *sekcionāli ortopapildinātu*, ja katram $x \in A$ eksistē ortopapildināšana $\frac{\perp}{x}$ sākumnogrieznī $[0, x]_{\leq} = \{a \in A \mid a \leq x\}$.

Definīcija A.3. [Cīrulis, 2015c] Sekcionāli ortopapildinātu sakārtotu kopu $\langle A, \leq, 0\rangle$, kurā katrā sākumnogrieznī $[0, x]_{\leq}$ ortopapildinājumu apzīmē ar $\frac{\perp}{x}$, sauc par *relatīvi ortopapildinātu*, ja visiem $a, b, x, y \in A$ ir spēkā:

(ro1) ja $a \leq b^{\perp}_{x}$, tad eksistē apvienojums $a \vee b$ kopā A (šo īpašību sauc par *ortoapvienojumu eksistenci*),

(ro2) ja $a \leq x \leq y$, tad $a^{\perp}_{x} \leq a^{\perp}_{y}$.

A.2. Vājās BCK-algebras

Definīcija A.4. [Cīrulis, 2010] Algebru $\langle A, \smallsetminus, 0\rangle$, kurā ir definēts daļējs kārtojums $\leq$ un kuras mazākais elements ir 0, sauc par *vājo BCK-algebru*, ja visiem $x, y, z \in A$ ir spēkā:

(wBCK1) $x \leq y$ tad un tikai tad, ja $x \smallsetminus y = 0$,

(wBCK2) ja $x \smallsetminus y \leq z$, tad $x \smallsetminus z \leq y$.

Definīcija A.5. Vājo BCK-algebru $\langle A, \setminus, 0\rangle$ sauc par

(a) *komutatīvu* (skat. [Cīrulis, 2013, 2014, 2015b]), ja visiem $x, y \in A$ ir spēkā:

$$x \setminus (x \setminus y) = y \setminus (y \setminus x), \tag{A.2}$$

(b) *vājo Henkina algebru* (skat. [Cīrulis, 2010]), ja visiem $x, y \in A$ ir spēkā:

$$\text{ja } x \setminus y \leq y, \text{ tad } x \leq y, \tag{A.3}$$

(c) *implikatīvu* (skat. [Cīrulis, 2014]), ja visiem $x, p, q \in A$ ir spēkā:

$$\text{ja } x \leq p \leq q, \text{ tad } p \setminus (q \setminus x) = x. \tag{A.4}$$

Pielikums B

Daži pusgrupu teorijas pamatjēdzieni

B.1. Inversās sistēmas un stingrie pusrežģi

Definīcija B.1. Skat. [Rotman, 2002, 499. lpp.]. Pieņemsim, ka $\langle S, \leq \rangle$ ir sakārtota kopa un $\mathcal{A} = \{A_s | s \in S\}$ ir viena un tā paša tipa algebru saime. Pieņemsim, ka $\mathcal{H} = \{h_s^t | s, t \in S$ un $s \leq t\}$ ir homomorfismu $h_s^t : A_t \to A_s$ saime. Pieņemsim, ka visiem $r, s, t \in S$ ir spēkā:

(a) homomorfisms h_t^t ir identitātes attēlojums,

(b) ja $r \leq s \leq t$, tad $h_r^s h_s^t = h_r^t$.

Tad pāri $\langle \mathcal{A}, \mathcal{H} \rangle$ sauc par algebru A_s un homomorfismu h_s^t *inverso sistēmu* (pār nesēju S).

Definīcija B.2. [Grillet, 1995, 75. lpp.] Pieņemsim, ka $\langle S, \wedge \rangle$ ir apakšējs pusrežģis un $\langle \mathcal{A}, \mathcal{H} \rangle$ ir savstarpēji neškeļošos pusgrupu inversā sistēma pār $\langle S, \wedge \rangle$.

Apvienojumā $A = \bigcup_{s \in S} A_s$ visām pusgrupām definējam operāciju $\bullet$ sekojošā veidā. Ja $x \in A_s$ un $y \in A_t$, un $\cdot_{s \wedge t}$ apzīmē pusgrupas $A_{s \wedge t}$ reizināšanu, tad

$$x \bullet y := h_{s \wedge t}^s(x) \cdot_{s \wedge t} h_{s \wedge t}^t(y). \tag{B.1}$$

Tad mēs rakstām $A = \mathfrak{S} \langle \mathcal{A}, \mathcal{H} \rangle$ un saucam pusgrupu $\langle A, \bullet \rangle$ (ir zināms, ka operācija $\bullet$ ir asociatīva, skat. piemēram [Howie, 1995]) par *pusgrupu stingro pusrežģi*.

B.2. D-pusgrupas

Definīcija B.3. [Stokes, 2015] Pusgrupu A sauc par *D-pusgrupu*, ja eksistē tāda tās idempotentu kopas E apakškopa U, ka katram $a \in A$ eksistē mazākais $e \in U$ ar īpašību, ka $ea = a$ (mazākais pēc idempotentu standarta daļējā sakārtojuma $\leq_E$, kas definēts kā $e \leq_E f$ tad un tikai tad, ja $ef = fe = e$).

Izmantotā literatūra

Cīrulis, J. (2010). Subtraction-like operations in nearsemilattices. *Demonstr. Math.*, 43(4):725–738.

Cīrulis, J. (2013). On commutative weak BCK-algebras. ArXiv preprint ArXiv13040999.

Cīrulis, J. (2014). Quasi-orthomodular posets and weak BCK-algebras. *Order*, 31(3):403–419.

Cīrulis, J. (2015a). Lattice operations on Rickart *-rings under the star order. *Linear Multilinear Algebra*, 63(3):497–508.

Cīrulis, J. (2015b). On some classes of commutative weak BCK-algebras. *Studia Logica*, 103(3):479–490.

Cīrulis, J. (2015c). Relatively orthocomplemented skew nearlattices in Rickart rings. *Demonstr. Math.*, 48(4):493–508.

Cīrulis, J. (2016). Extending the star order to Rickart rings. *Linear Multilinear Algebra*, 64(8):1498–1508.

Cīrulis, J. (2017). The diamond partial order for strong Rickart rings. *Linear Multilinear Algebra*, 65(1):192–203.

Cīrulis, J. (2019). Focal Baer semigroups and a restricted star order. *Acta Scientiarum Mathematicarum*, 85(1-2):97–117.

Cīrulis, J. and Cremer, I. (2018). Notes on reduced Rickart rings, I. *Beitr. Zur Algebra Geom. Algebra Geom.*, 59(2):375–389.

Cīrulis, J. and Cremer, I. (2022). On existence of joins and meets under the star order in strong Rickart rings. *Linear and Multilinear Algebra*, 70(22):7370–7383.

Cremer, I. (2024). Order structure of a right-strong Rickart ring under the right star order. *Communications in Algebra*, 52(5):2015–2032.

Cremer, I. (2025). Decompositions of multiplicative semigroups of m-domain rings and reduced Rickart rings. *Int. Electron. J. Algebra*, 37:273–296.

Cremer, I. and Marovt, J. (N.D.). Weak differences, weak BCK-algebras and applications to some partial orders on rings. *Math. Slovaca*. To appear.

Dolinar, G. and Marovt, J. (2018). On a generalized concept of order relations on $B(H)$. *Mathematica Slovaca*, 68(1):33–40.

Foulis, D. J. (1960). Baer *-semigroups. *Proc. Am. Math. Soc.*, 11(4):648–654.

Fountain, J. (1976). Right PP monoids with central idempotents. *Semigroup Forum*, 13(1):229–237.

Grillet, P. A. (1995). *Semigroups: an introduction to the structure theory*. Marcel Dekker, Inc., New York.

Howie, J. M. (1995). *Fundamentals of Semigroup Theory*. Number 12 in London Mathematical Society Monographs New Series. Oxford University Press, Inc., New York. Reprinted 2003.

Krēmere, I. (2016). Left-star order structure of Rickart *-rings. *Linear Multilinear Algebra*, 64(3):341–352.

Maeda, S. (1960). On a ring whose principal right ideals generated by idempotents form a lattice. *J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. Math. Phys. Chem.*, 24(3):509–525.

Marovt, J. (2015). On partial orders in Rickart rings. *Linear Multilinear Algebra*, 63(9):1707–1723.

Marovt, J., Rakić, D. S., and Djordjević, D. S. (2015). Star, left-star, and right-star partial orders in Rickart *-rings. *Linear Multilinear Algebra*, 63(2):343–365.

Rakic, D. S. (2015). Generalization of sharp and core partial order using annihilators. *Banach J. Math. Anal.*, 9(3):228–242.

Rotman, J. J. (2002). *Advanced Modern Algebra, 1st edition*. American Mathematical Society.

Stokes, T. (2015). Domain and range operations in semigroups and rings. *Commun. Algebra*, 43(9):3979–4007.

Apmeklēto konferenču saraksts

Veicot šajā disertācijā izklāstītos pētījumus, autore ir piedalījusies sešās vietējās un vienpadsmit starptautiskās konferencēs. Tomēr konferenču ziņojumi **C6**, **C7** un **C9** nebija tieši saistīti ar šīs disertācijas tēmu.

C1 Insa Krēmere. Reduced Rickart rings and skew nearlattices. *Algebra and its applications.* Taevaskoja, Igaunija, 2017.

C2 Insa Krēmere. Reduced Rickart rings and skew nearlattices. *Topology, Algebra and Categories in Logic 2017.* Prāga, Čehija, 2017.

C3 Insa Krēmere. Reducēta Rikarta gredzena dekompozīcija pusgrupu stingra pusrežģī. *LU 76. starptautiskā zinātniskā konference.* Rīga, Latvija, 2018.

C4 Insa Krēmere. Strong semilattice decomposition of semigroup-bands. *AAA96 – 96. Arbeitstagung Allgemeine Algebra.* Dārmštate, Vācija, 2018.

C5 Insa Krēmere. Reducētie Rikarta gredzeni un greizie gandrīzrežģi. *12. Latvijas matemātikas konference.* Ventspils, Latvija, 2018.

C6 Insa Krēmere. The variety of reduced Rickart rings. *Summer School on Algebra and Ordered Sets 2018.* Špindlerūvmlīna, Čehija, 2018.

C7 Insa Krēmere. Prime ideals in reduced Rickart rings. *International Conference on Algebra and its Applications.* Tartu, Igaunija, 2018.

C8 Insa Krēmere. Weak BCK-algebras in strong Rickart rings. *AAA98 – 98. Arbeitstagung Allgemeine Algebra.* Drēzdene, Vācija, 2019.

C9 Insa Krēmere. Reducēto Rikarta gredzenu varietāte. *LU 77. starptautiskā zinātniskā konference.* Rīga, Latvija, 2019.

C10 Insa Krēmere. Weak BCK-algebra in Rickart rings. *LU 78. starptautiskā zinātniskā konference.* Rīga, Latvija, 2020.

C11 Insa Krēmere. Strong semilattice decomposition of m-domain rings. *AAA100 – 100. Arbeitstagung Allgemeine Algebra.* Tiešsaistē (organizēja Jagaiļa Universitāte Krakovā), 2021.

C12 Insa Krēmere. Order structure of a strong Rickart ring under the strong right star order. *AAA101 – 101. Arbeitstagung Allgemeine Algebra.* Tiešsaistē (organizēja Novisadas Universitāte), 2021.

C13 Insa Krēmere. Stingro Rikarta gredzenu sakārtojumi un struktūra. *LU 79. starptautiskā zinātniskā konference.* Tiešsaistē (organizēja Latvijas Universitāte), 2021.

C14 Insa Krēmere. Stingra pusrežģa dekompozīcija īpašām D-abundantām D-pusgrupām. *LU 80. starptautiskā zinātniskā konference.* Tiešsaistē (organizēja Latvijas Universitāte), 2022.

C15 Insa Krēmere. A generalization of differences and its connection to weak BCK-algebras. *AAA103 – 103. Arbeitstagung Allgemeine Algebra.* Tartu, Igaunija, 2023.

C16 Insa Krēmere. A generalization of differences and its connection to weak BCK-algebras. *LU 82. starptautiskā zinātniskā konference.* Rīga, Latvija, 2024.

C17 Insa Krēmere. Certain partial orders on strong Rickart rings. *Summer School on Algebra and Ordered Sets 2024.* Karolinka, Čehija, 2024.

Autores publikācijas

Krēmere, I. (2016). Left-star order structure of Rickart *-rings. *Linear Multilinear Algebra*, 64(3):341–352.

Cīrulis, J. and Cremer, I. (2018). Notes on reduced Rickart rings, I. *Beitr. Zur Algebra Geom. Algebra Geom.*, 59(2):375–389.

Cīrulis, J. and Cremer, I. (2022). On existence of joins and meets under the star order in strong Rickart rings. *Linear and Multilinear Algebra*, 70(22):7370–7383.

Cremer, I. (2024). Order structure of a right-strong Rickart ring under the right star order. *Communications in Algebra*, 52(5):2015–2032.

Cremer, I. (2025). Decompositions of multiplicative semigroups of m-domain rings and reduced Rickart rings. *Int. Electron. J. Algebra*, 37:273–296.

Cremer, I. and Marovt, J. (N.D.). Weak differences, weak BCK-algebras and applications to some partial orders on rings. *Math. Slovaca*. To appear.